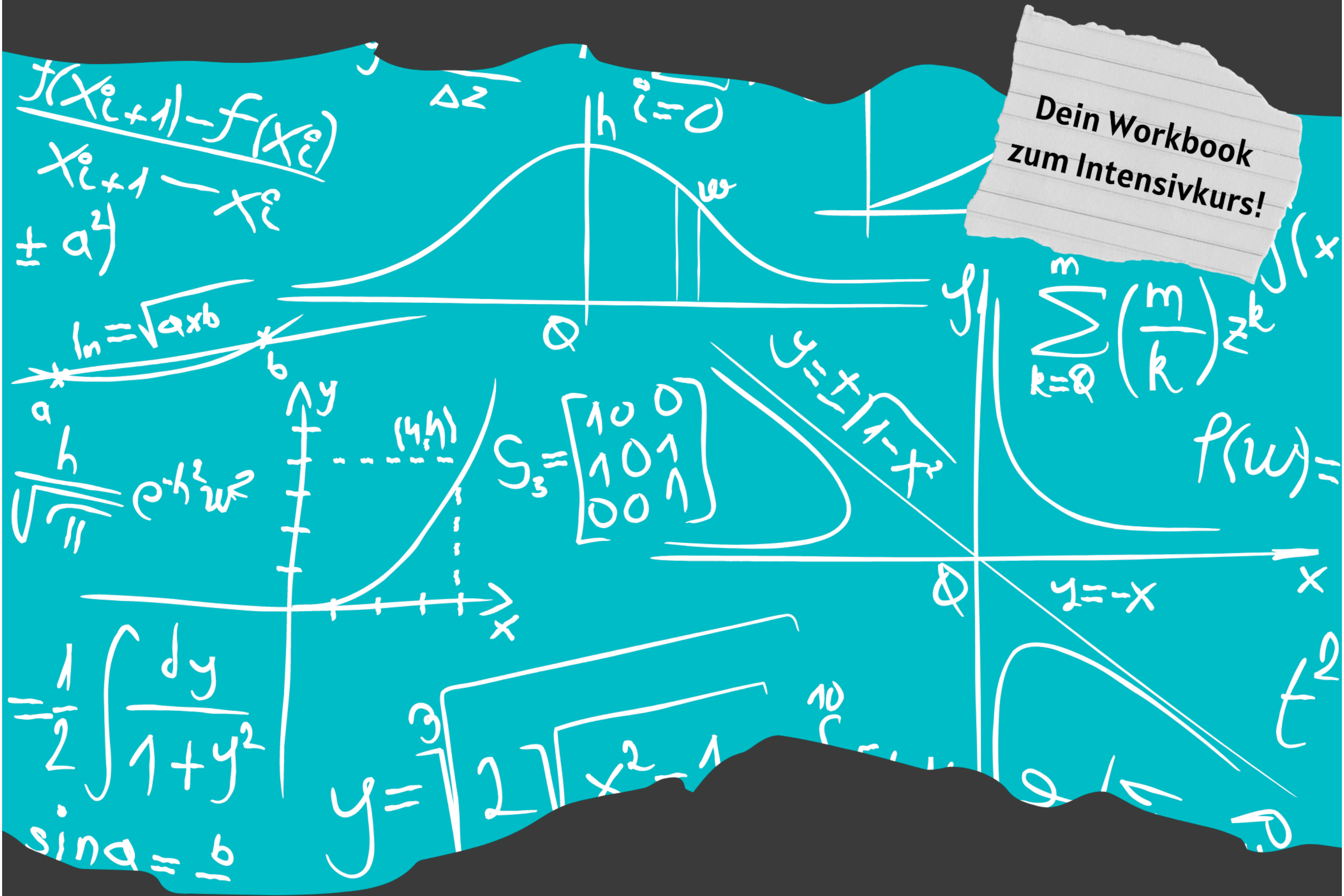
Intensivkurs – Mathe GK



Dein Workbook zum Intensivkurs!

Stochastik

Abitur 2022

Lesson 19

Zufallsexperimente - Basiswissen

Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, bei dem mindestens zwei Ergebnisse möglich sind und der Zufall entscheidet, welches Ergebnis eintritt

Die Ergebnismenge Ω ist die Menge aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments

Beispiel: Wird ein Würfel einmal geworfen gilt $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

Ein mehrstufiges Zufallsexperiment liegt vor, wenn der zufällige Vorgang aus mehreren nacheinander ablaufenden Teilvorgängen besteht (Durchführungen).

Eine Teilmenge A der Ergebnismenge heißt Ereignis A.

Relative & absolute Häufigkeit

Allgemein gilt:

Absolute Häufigkeit: H_i → Anzahl der Ausprägung

Relative Häufigkeit: $h_i = \frac{H_i}{n}$ mit n = Anzahl insgesamt

→ Anzahl im Verhältnis zur gesamten Menge

Aufgabe 1:

Stichprobe einer Notenverteilung:

1,2,3,2,4,5,6,6,2,3,1,4

- Wie viele Leute haben die Klausur mitgeschrieben?
- Fülle folgende Tabelle aus:

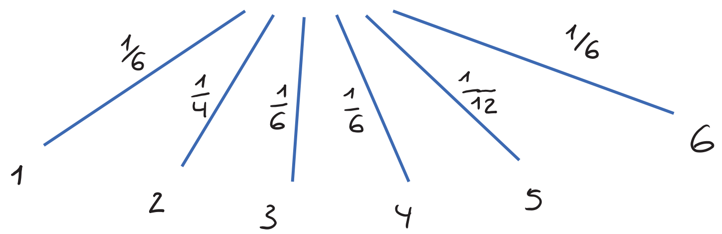
Wert	1	2	3	4	5	6
Relative Häufigkeit						
Absolute Häufigkeit						

Notizen:

Lesson 20
Baumdiagramme

Baumdiagramm

Alle möglichen Ausprägungen schreibt man an Pfade in ein Baumdiagramm mit den jeweiligen relativen Häufigkeiten.



Ein Baumdiagramm eignet sich bei mehrstufigen Zufallsexperimenten in einfachen Fällen

Aufgabe 2:

Ein Glücksrad wird 2 mal gedreht.

Die Hälfte der Fläche des Glücksrades ist schwarz bemalt. Ein Viertel ist rot bemalt. Ein Achtel ist blau und ein Achtel ist gelb bemalt.

Bestimme für jede Farbe die Relative Häufigkeit, wenn man das Rad ein Mal dreht.

Bestimme das zugehörige Baumdiagramm, wenn man das Rad zwei Mal dreht.

Notizen:

Notizen:

1. PFADREGEL:

Entlang eines Pfades wird multipliziert. Für welches Ergebnis willst du die Wahrscheinlichkeit berechnen? Suche den zugehörigen Pfad und multipliziere entlang des Pfades.

2. PFADREGEL:

Einzelne Pfade werden addiert. Für welches Ergebnis willst du die Wahrscheinlichkeit berechnen? Suche alle zugehörigen Pfade, multipliziere entlang des Pfades und addiere die Wahrscheinlichkeiten aller passenden Pfade.

TIPP:

Sind Aufgaben mit „mindestens“ und „höchstens“ formuliert kannst du gucken, ob es einfacher ist die Gegenwahrscheinlichkeit zu berechnen.

Wenn gilt: Ereignis: A , Gegenereignis: $\bar{A}$

Dann kannst du die gesuchte Wahrscheinlichkeit von A berechnen mit:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Aufgabe 3:

Berechne mithilfe des bereits gezeichneten Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

A: Es wird ein Mal schwarz gedreht

B: Es wird ein Mal gelb und ein Mal rot gedreht

C: Es wird mindestens ein Mal gelb oder blau gedreht

D: Es wird höchstens ein Mal rot gedreht

Notizen:

Notizen:

Notizen:

Ziehen mit & ohne Zurücklegen

Wenn du „mit Zurücklegen“ ziehst ändern die Wahrscheinlichkeiten sich nicht, egal wie viele Durchführungen man betrachtet.

BEISPIEL: Glücksrad drehen

Wenn du „ohne Zurücklegen“ ziehst ändern sich die Wahrscheinlichkeiten bei jeder weiteren Durchführung.

BEISPIEL: Auf dem Tisch liegen Smarties in verschiedenen Farben. 3 Kinder dürfen sich nacheinander je eins nehmen.

AUFGABE 4:

In einer Urne befinden sich drei weiße und sieben schwarze Kugeln und du ziehst drei Kugeln ohne Zurücklegen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass du genau zwei weiße Kugeln ziehst?

Notizen:

Ereignisse

DAS GEGENEREIGNIS: $\bar{A}$

Jedes Ereignis hat ein Gegenereignis. Das Gegenereignis enthält alle Ergebnisse, die das Ereignis nicht enthält. Es gilt:

$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 - P(\bar{A}) = P(A)$

Beispiel: Krank oder Gesund, Schlafend oder Wach,...

DIE SCHNITTMENGE: $A \cap B$

Die Schnittmenge umfasst alle Ergebnisse, die zugleich in A und B liegen. Das Ergebnis muss also sowohl in A als auch in B enthalten sein.

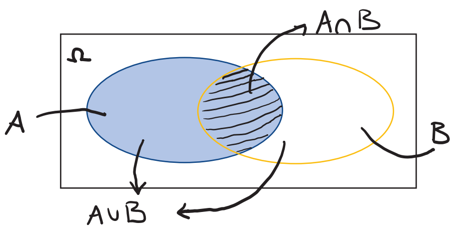
Beispiel: In einem Raum befinden sich kranke und gesunde Leute und Schwarzhaarige und Blonde.

Wenn A: Krank und B: Blond
Dann gilt: $A \cap B$ umfasst alle Leute, die sowohl krank als auch blond sind

DIE VEREINIGUNGSMENGE: $A \cup B$

Die Vereinigungsmenge umfasst alle Ergebnisse, die entweder in A oder in B oder in beidem liegen (mindestens eins von beidem muss gelten).

Wenn A und B sich überschneiden gilt:



Additionssatz:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Wenn A und B sich nicht überschneiden:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Weil dann gehören keine Ergebnisse zu $A \cap B$

Lesson 21

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$
ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Bedingung, dass B bereits eingetreten ist.
Dann gilt:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P_B(\emptyset) = 0$, $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$

$P_B(A \cup C) = P_B(A) + P_B(C) - P_B(A \cap C)$

Multiplikationssatz:

$P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(B)$

Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig voneinander, wenn gilt:

$P_B(A) = P(A)$

beziehungsweise:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Lesson 22

Laplace - Experimente

- Einfachstes Zufallsexperiment
- Jedes Ergebnis ist gleich wahrscheinlich

Beispiel: Würfelwurf, Münzwurf

- Dann gilt: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A sind die Anzahl der günstigen Fälle geteilt durch die Anzahl der möglichen Fälle

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Beispiel: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augenzahl bei einmaligem Würfel gerade?

Ereignis A: Gerade Zahl $\rightarrow$ die zugehörige Menge ist $\{2, 4, 6\}$

Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Mögliche Ergebnisse: $|\Omega| = 6$

Günstige Fälle: $|A| = 3$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 5:

Ein Glücksrad hat vier Felder mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4. Alle Felder sind gleich groß. Das Rad wird zwei Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe der beiden gedrehten Zahlen ungerade ODER mindestens 6?

Notizen:

Vierfeldertafel

	A	$\bar{A}$	
B	Häufigkeit $A \cap B$	Häufigkeit $\bar{A} \cap B$	Häufigkeit B
$\bar{B}$	Häufigkeit $A \cap \bar{B}$	Häufigkeit $\bar{A} \cap \bar{B}$	Häufigkeit $\bar{B}$
	Häufigkeit A	Häufigkeit $\bar{A}$	Häufigkeit Ω

Aufgabe 6:

Bei einer Untersuchung gaben von 850 befragten Personen 26 Männer an, dass sie Brillenträger sind. Insgesamt bestätigten 396 Frauen, dass sie keine Brille tragen. Von den befragten Personen waren 430 Personen männlich. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

- $P(\bar{A})$
- $P(\bar{B})$
- $P(A \cap B)$
- $P(A \cap \bar{B})$
- $P(A)$
- $P(B)$

Notizen:

Notizen:

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn gilt:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ → Multiplikationssatz

Sind A und B unabhängig, dann sind auch die anderen unabhängig:

$\bar{A}$ und $\bar{B}$, A und $\bar{B}$, $\bar{A}$ und $\bar{B}$ sind dann auch unabhängig.

Bei der vorliegenden Aufgabe:

$$\left.\begin{array}{l} P(A) \cdot P(B) = \frac{43}{85} \cdot \frac{1}{17} \approx 0{,}03 \\ P(A \cap B) \approx 0{,}03 \end{array}\right\} P(A \cap B) \approx P(A) \cdot P(B)$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Wenn eine Zufallsvariable verschiedene Werte $x_1, \ldots, x_n$ annehmen kann, dann sind die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Werte die Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$		$P(X=x_3)$

- Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X ist dann

$$E(X) = \mu = x_1 \cdot P(X=x_1) + x_2 \cdot P(X=x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X=x_n)$$

- Geht es in einem Spiel um Geld, welches die Spieler je nach Spielausgang zahlen oder gewinnen, dann wird ein Spiel als „fair“ bezeichnet, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler null ist.

Aufgabe 7:

In einer Urne befinden sich drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Es wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis die erste weiße Kugel erscheint. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Ziehungen.

- Welche Werte kann X annehmen?
- Wie ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung?
- Wie oft muss man im Mittel ziehen, bis man die erste weiße Kugel zieht?

Notizen:

Notizen:

Lesson 23

Statistische kennzahlen

Statistische Kennzahlen

• Mittelwert

Ist der Durchschnitt der Werte $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

n ist die Anzahl der gegebenen Werte

Bei Zufallsgrößen nutzt man den Erwartungswert

• Median

Ordne die gegebenen Werte der Größe nach, dann ist der Median der Wert in der Mitte. Wenn eine gerade Anzahl an Werten vorliegt liegen zwei Zahlen in der Mitte. Dann berechnest du den Durchschnitt aus diesen beiden Zahlen.

• Maximum

Das ist der größte Wert aus der Liste

• Minimum

Das ist der kleinste Wert aus der Liste

Streuungsmaße:

• Varianz

Man berechnet also den Durchschnitt. Dann zieht man von jedem Wert den Durchschnitt ab und rechnet hoch zwei. Dann addierst du alle Ergebnisse und teilst sie durch die Gesamtzahl n

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

- Standardabweichung

Die Standardabweichung ist s, also die Wurzel der Varianz.

Notizen:

Aufgabe 8:

Max läuft jeden morgen zur Schule und guckt auf die Uhr um zu sehen, wie viele Minuten er gebraucht hat. Bestimme den Durchschnitt, Minimum, Maximum, Varianz und Standardabweichung.

Tag 1	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 5
15 Minuten	17 Minuten	14 Minuten	12 Minuten	12 Minuten

Notizen:

Lesson 24

Binomialverteilung

Binomialverteilung

- Experimenten, in denen es nur zwei mögliche Ausgänge geben kann, also beispielsweise „Ja“ und „Nein“, „Erfolg“ und „Misserfolg“, liegt eine Binomialverteilung zugrunde
- Solche Experimente nennt man Bernoulli Experimente
- Beispiel: Münzwurf
- Wenn die Zufallsvariable X binomialverteilt ist, dann gilt:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = B_{n,p}(k) \quad \Big\} \text{ Wahrscheinlichkeit für k Treffer bei n Durchführungen}$$

n ist die Anzahl der Ziehungen oder Durchführungen

p ist die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg

k ist die Anzahl der Erfolge

Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

- Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable:

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

X nimmt die größte Wahrscheinlichkeit bei dem Wert E(X) oder in der Nähe von E(X) an.

- Die kumulierte Wahrscheinlichkeit ist die Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten:

$$F_{n,p}(k) = P(X \leq k) = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=k)$$

- Wichtig bei einem Bernoulli-Experiment ist, dass sich die Wahrscheinlichkeiten nicht mit der Zahl der Durchführungen ändern!

- Man kann $B_{n,p}(k)$ und $F_{n,p}(k)$ mit dem Taschenrechner berechnen.

- Wenn nach einer Mindest-Wahrscheinlichkeit gefragt ist solltest du diese über das Gegenereignis berechnen:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$
$$P(X \geq 7) = 1 - P(X < 7) = 1 - P(X \leq 6)$$

- Wenn nach einer Wahrscheinlichkeit in einem Intervall gefragt ist solltest du die kumulierten Wahrscheinlichkeiten einzeln berechnen und voneinander abziehen
- Beispiel:

$$P(X \geq 7 \text{ und } X < 20) = P(7 \leq X \leq 19)$$
$$= P(X \leq 19) - P(X \leq 6)$$

- Es kann auch n oder p gesucht und die restlichen Angaben gegeben sein

Aufgabe 9:

Man geht davon aus, dass 3,5% der Fahrgäste Schwarzfahrer sind. Ein Kontrolleur fragt 40 Fahrgäste nach einem gültigen Fahrschein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

A: Genau 3 Fahrgäste sind Schwarzfahrer

B: Mindestens 2 Fahrgäste sind Schwarzfahrer

Mit wie vielen Schwarzfahrern kann der Kontrolleur rechnen?

Notizen:

Aufgabe 10:

Im Durchschnitt haben 9 Prozent der Männer eine Rot-Grün-Schwäche (und sind sich dessen bewusst). Wie viele Männer müssen mindestens befragt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%

a) Mindestens einen Mann

b) Mindestens fünf Männer

mit dieser Sehschwäche zu finden.

Notizen:

Notizen:

Notizen:

Notizen:

Aufgabe 11:

In einer Laptop-Produktionsfirma ist ein Laptop mit einer Wahrscheinlichkeit p defekt.

Wie groß darf die Wahrscheinlichkeit p höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % von 20 Laptops

a) Keiner defekt ist

b) Höchstens ein Laptop defekt ist

Notizen:

Notizen:

Notizen:

Lösungen der Aufgaben

Lösung Aufgabe 1

Um einen Überblick zu behalten ordnest du die Stichprobe am besten immer erst der Größe nach (wenn sie so klein ist):

1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,6,6

• Wie viele Leute haben die Klausur mitgeschrieben?

Insgesamt 12 Leute

• Fülle folgende Tabelle aus:

Wert	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit	2	3	2	2	1	2
Relative Häufigkeit	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Lösung Aufgabe 2

Schwarz : s

Rot : r

Blau : b

Gelb : g

Relative Häufigkeiten:

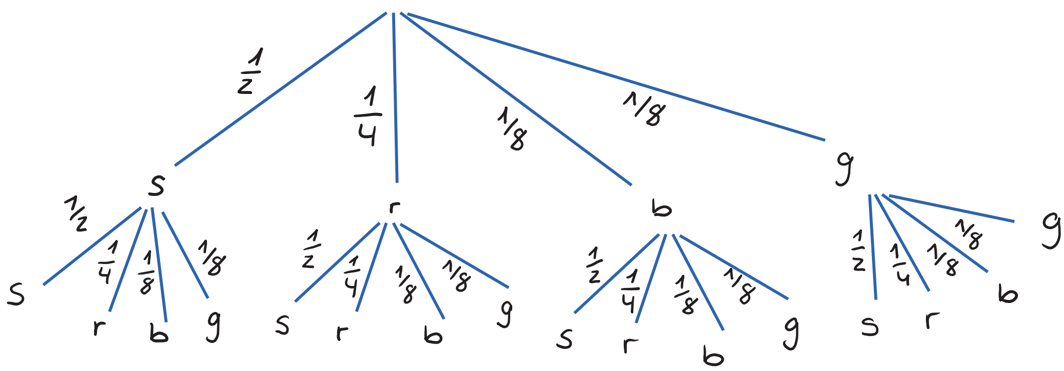
$P(s) = \frac{1}{2} = 50\%$

$P(r) = \frac{1}{4} = 25\%$

$P(b) = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$

$P(g) = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$

Zugehöriges Baumdiagramm:

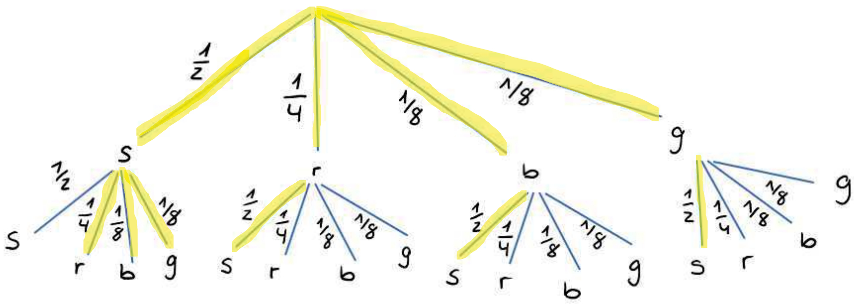


Lösung Aufgabe 3

A: Es wird ein Mal schwarz gedreht

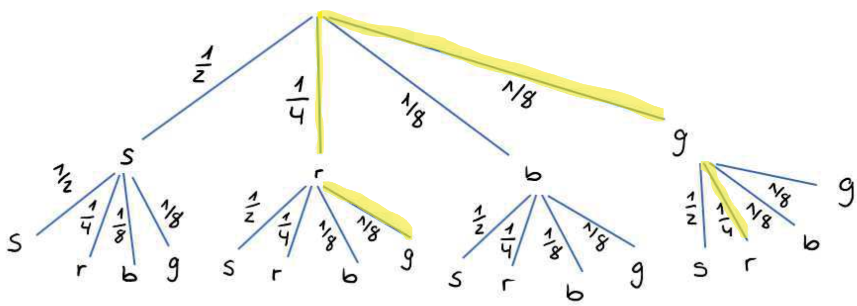
$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 0{,}5 = 50\%$$



B: Es wird ein Mal gelb und ein Mal rot gedreht

$$P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

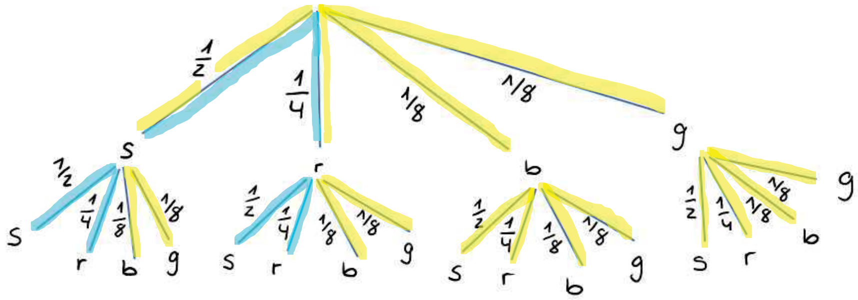


C: Es wird mindestens ein Mal gelb oder blau gedreht

$$P(C) = 1 - P(\bar{C})$$

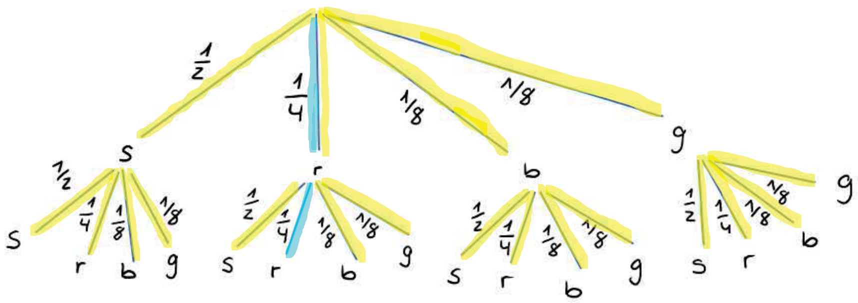
$$P(\bar{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$$

$$P(C) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$



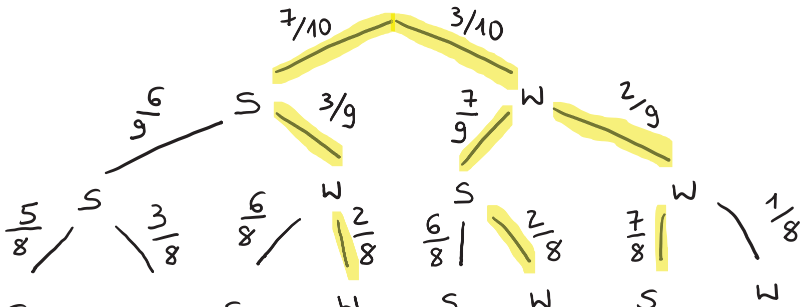
D: Es wird höchstens ein Mal rot gedreht

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right] = \frac{15}{16}$$



Lösung Aufgabe 4

1. Baumdiagramm zeichnen:



$$P(WWS) + P(WSW) + P(SWW) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = 0{,}175$$

Lösung Aufgabe 5

A: Die Summe der beiden Zahlen ist ungerade

B: Die Summe der beiden Zahlen ist mindestens 6.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge $P(A \cup B)$

Gemäß dem Additionssatz gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Die Ergebnismenge ist: $4 \cdot 4 = 16 = |\Omega|$

$A = \{1\text{-}2; 1\text{-}4; 2\text{-}1; 2\text{-}3; 3\text{-}2; 3\text{-}4; 4\text{-}1; 4\text{-}3\} \rightarrow P(A) = \frac{8}{16}$

$B = \{2\text{-}4; 3\text{-}3; 3\text{-}4; 4\text{-}2; 4\text{-}3; 4\text{-}4\} \rightarrow P(B) = \frac{12}{16}$

$A \cap B = \{3\text{-}4, 4\text{-}3\}$

$\rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{16}$

$P(A \cup B) = \frac{8}{16} + \frac{6}{16} - \frac{2}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

Lösung Aufgabe 6

A: Person ist männlich

B: Person ist Brillenträger

	A	$\bar{A}$	
B	26	50 - 26 = 24 (4)	850 - 800 = 50 (3)
$\bar{B}$	430 - 26 = 404 (1)	396	404 + 396 = 800 (2)
	430	24 + 396 = 420 (5)	850

Vierfeldertafel

$P(\bar{A}) = \frac{420}{850} = \frac{42}{85}$ $\qquad$ $P(A) = \frac{430}{850} = \frac{43}{85}$

$P(\bar{B}) = \frac{800}{850} = \frac{16}{17}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{50}{850} = \frac{1}{17}$

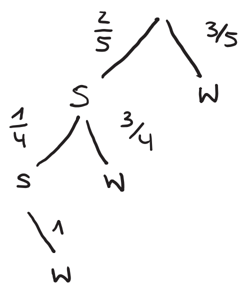
$P(A \cap B) = \frac{26}{850} = \frac{13}{425}$

$P(A \cap \bar{B}) = \frac{404}{850} = \frac{202}{425}$

Lösung Aufgabe 7

- Da es zwei schwarze Kugeln gibt zieht man spätestens beim dritten Zug eine weiße Kugel. X kann also die Werte 1, 2 und 3 annehmen.
- Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$3/5$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{10}$



- Erwartungswert:

$E(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = 1{,}5$

Im Mittel muss man auf lange Sicht 1,5 Mal ziehen

Lösung Aufgabe 8

Tag 1	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 5
15 Minuten	17 Minuten	14 Minuten	12 Minuten	12 Minuten

Mittelwert: $\quad n = 5$ Tage

$\bar{x} = \frac{15 + 17 + 14 + 12 + 12}{5} = 14$

Minimum: 12 Minuten

Maximum 17 Minuten

Varianz: $s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

$$s^2 = \frac{(15-14)^2 + (17-14)^2 + (14-14)^2 + (12-14)^2 + (12-14)^2}{5} = 3{,}6$$

Standardabweichung: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3{,}6} \approx 1{,}9$

Lösung Aufgabe 9

Wahrscheinlichkeit für einen Treffer: p = 0,035

Anzahl der Durchführungen / Überprüfungen: n = 40

Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der Schwarzfahrer

$$P(A) = P(X=3) = \binom{40}{3} \cdot 0{,}035^3 \cdot 0{,}965^{37}$$

$$= 9880 \cdot 0{,}035^3 \cdot 0{,}965^{37} \approx 0{,}11 = 11\%$$

$$P(B) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}5894 = 0{,}4106$$

↳ Taschenrechner!

$$E(X) = \mu = 40 \cdot 0{,}035 = 1{,}4$$

→ Der Kontrolleur kann mit ca. einem Schwarzfahrer rechnen.

Lösung Aufgabe 10

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Männer, die diese Sehschwäche haben.

n ist die Anzahl der befragten Männer und ist gesucht.

p ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann diese Sehschwäche hat: p = 0,09.

a) $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$

$1 - P(X=0) \geq 0{,}9$

$P(X=0) \leq 0{,}1$

Ergebnisse des Taschenrechners:

$n=24: \quad P(X=0) \approx 0{,}1040$

$n=25: \quad P(X=0) \approx 0{,}0946$

Es müssen also mindestens 25 Männer befragt werden, damit mindestens ein Mann die Rot-Grün-Schwäche hat.

Rechenweg ohne Taschenrechner:

$$1 - P(X=0) \geq 0{,}9$$

$$1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}09^0 \cdot 0{,}91^n \geq 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 0{,}91^n \geq 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \quad -0{,}91^n \geq -0{,}1$$

→ Teilt man durch eine negative Zahl dreht das Gleichzeichen sich um.

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}91^n \leq 0{,}1$$

$$\Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(0{,}91) \leq \ln(0{,}1)$$

→ $\ln(0{,}91) < 0$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}91)} \approx 24{,}4$$

b) $P(X \geq 5) \geq 0{,}9$

$$1 - P(X \leq 4) \geq 0{,}9$$

$$P(X \leq 4) \leq 0{,}1$$

Ergebnisse des Taschenrechners:

$n=86: \quad P(X \leq 4) \approx 0{,}1043$

$n=87: \quad P(X \leq 4) \approx 0{,}0988$

Es müssen also mindestens 87 Männer befragt werden, damit mindestens fünf Männer die Rot-Grün-Schwäche haben.

- Wenn man versucht diese Aufgabe ohne Taschenrechner über die Gleichung zu lösen, dann kommt die Variable n sowohl als Faktor als auch als Exponent vor. Die Gleichung kann also nicht durch den ln gelöst werden.
- Solche Aufgaben muss man lösen, indem man systematisch mit dem Taschenrechner ausprobiert (wie hier gemacht). Man kann die Funktion in den Taschenrechner eingeben und sich die Funktionswerte als Tabelle ausgeben lassen.
- Die Frage nach „mindestens einem Treffer" ist die einzige, die sich ohne Taschenrechner lösen lässt!

Lösung Aufgabe 11

a) Wenn X die Anzahl der defekten Laptops bei 20 produzierten Laptops ist, dann ist X binomialverteilt mit n=20.

p ist gesucht

Es soll gelten:

$$P(X=0) \geq 0{,}8$$

In Gleichung einsetzen:

$$\binom{20}{0} p^0 \cdot (1-p)^{20} \geq 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-p)^{20} \geq 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-p \geq \sqrt[20]{0{,}8}$$

$$\Leftrightarrow \quad -p \geq \sqrt[20]{0{,}8} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad p \leq 1 - \sqrt[20]{0{,}8} \approx 0{,}011$$

Wenn ein Laptop mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 0,011 defekt ist, dann hat man mit mindestens 80% Wahrscheinlichkeit keinen defekten Laptop, wenn man 20 produziert.

b) Folgende Bedingung soll erfüllt sein:

$$P(X \leq 1) \geq 0{,}8$$

$$\binom{20}{0} p^0 \cdot (1-p)^{20} + \binom{20}{1} p^1 \cdot (1-p)^{20-1} \geq 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-p)^{20} + 20\, p \cdot (1-p)^{19} \geq 0{,}8$$

→ Nicht exakt lösbar, also nutzen wir den Taschenrechner

Bestimmung mit dem Taschenrechner:

$p = 0{,}03 \Rightarrow P(X \leq 1) \approx 0{,}88$

$p = 0{,}04 \Rightarrow P(X \leq 1) \approx 0{,}81$

$p = 0{,}05 \Rightarrow P(X \leq 1) \approx 0{,}74$

Höchstens einen defekten Laptop unter 20 Laptops mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% bekommt man, wenn ein Laptop höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von circa 4% defekt ist.