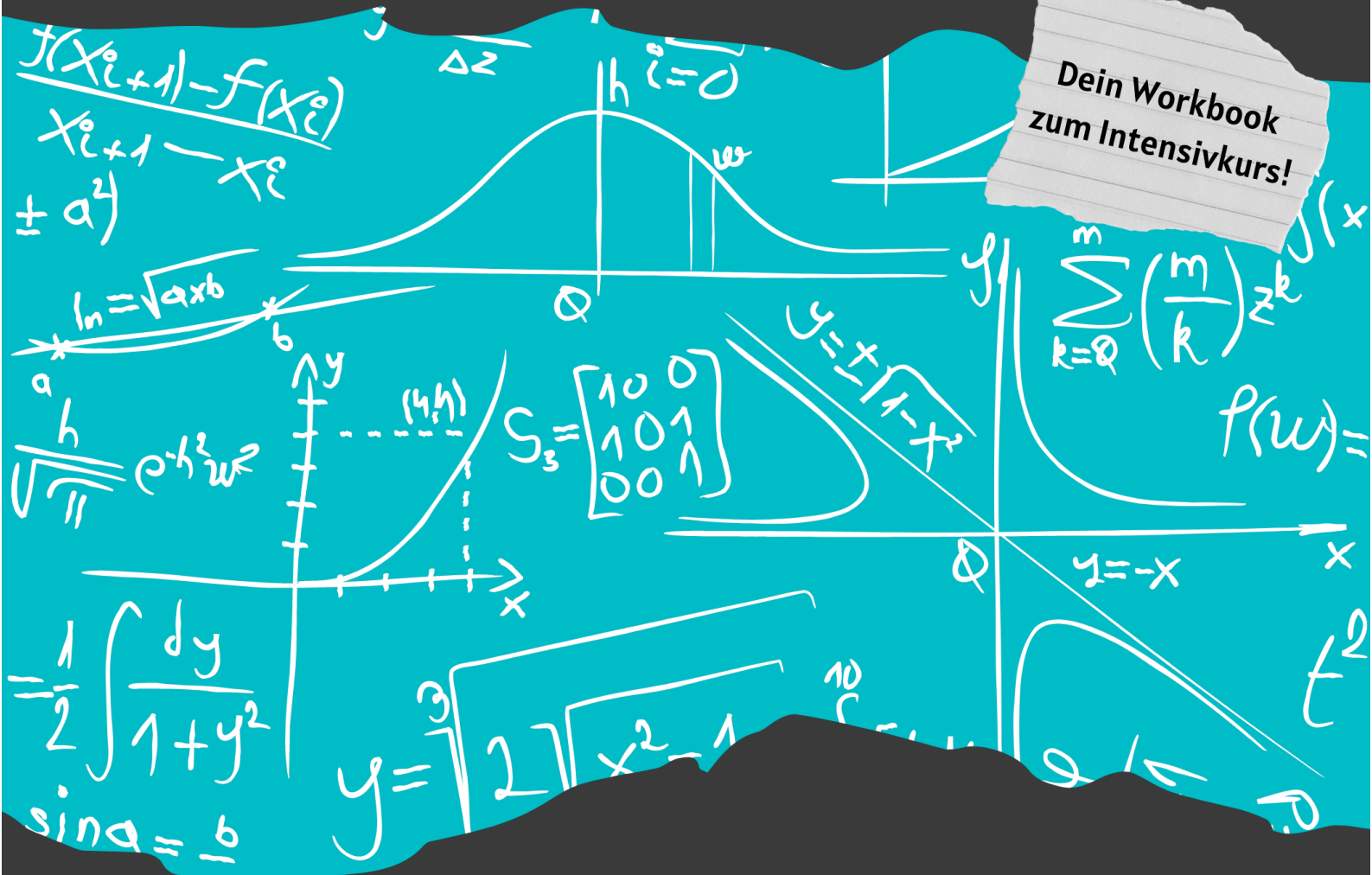


Intensivkurs - Mathe GK

Dein Workbook
zum Intensivkurs!



Analytische Geometrie

Abitur 2022



Lesson 11

Vektoren / Vektorrechnung

Punkte im Koordinatensystem

Punkt A: $A(a_1|a_2|a_3)$

Hier: $A(2|3|2)$

Punkt B: $B(b_1|b_2|b_3)$

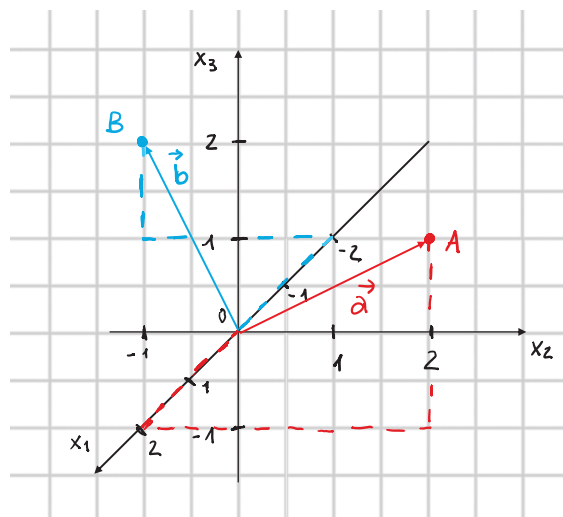
Hier: $B(-2|-2|1)$

Der Ortsvektor eines Punktes P:

$$\vec{p} = \vec{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Hier:

$$\vec{a} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

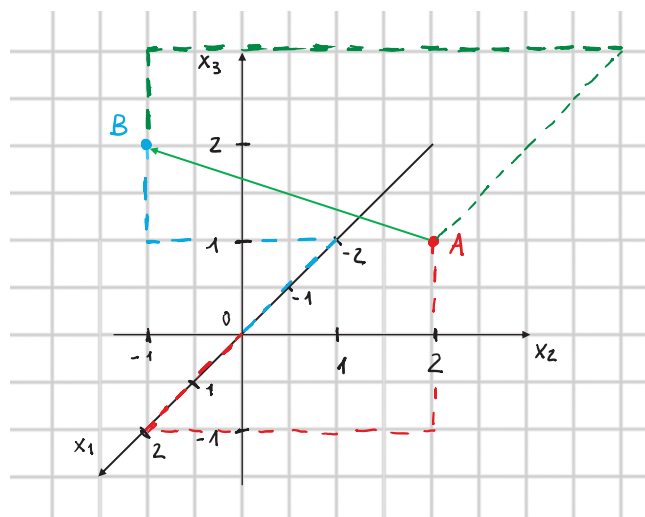


Verbindungsvektor $\vec{v} = \vec{AB}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} - \vec{a}$$

Hier:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 - 2 \\ -2 - 3 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

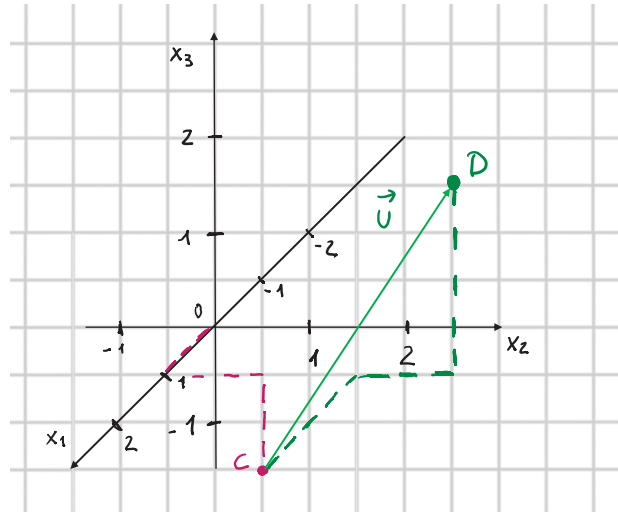


AUFGABE:

Zeichne den Punkt C (1 | 1 | -1).

Vektor \vec{u} verbindet den Punkt C mit dem Punkt D. Zeichne den Punkt D für:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Verrechnung von Vektoren

Du addierst und subtrahierst einfach die einzelnen Koordinaten der Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} ; \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1:

Berechne sowohl $\vec{a} + \vec{b}$ als auch $\vec{a} - \vec{b}$ für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Notizen:



Lesson 12

Punkte, Strecken und Formen

Betrag eines Vektors

Wenn du die Länge eines Vektors berechnen sollst musst du den Betrag bestimmen.

Ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ hat den Betrag

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

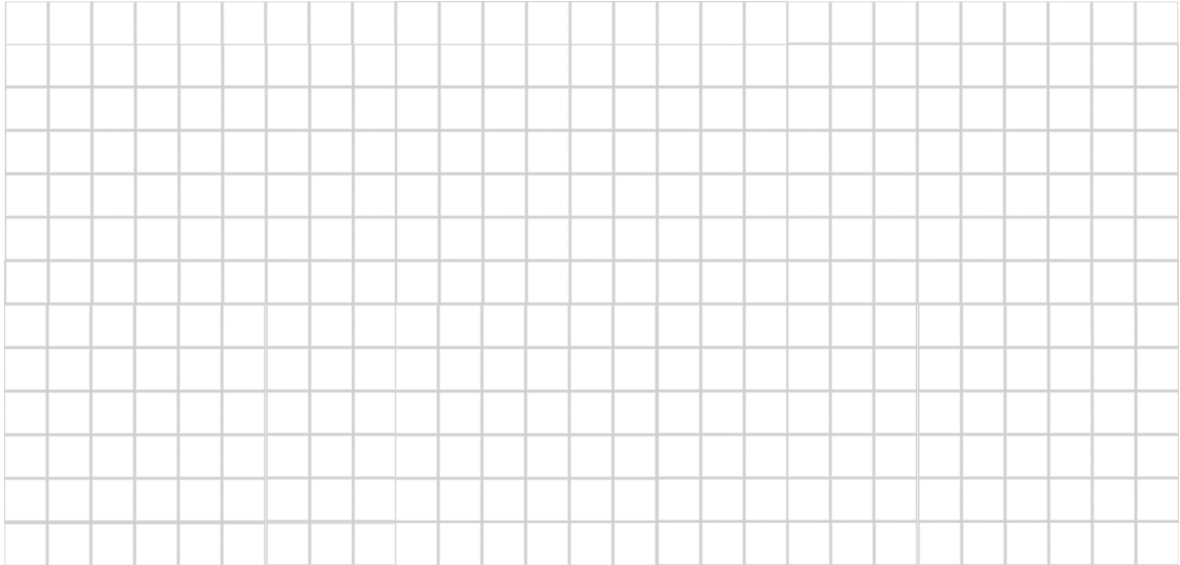
Einheitsvektor

Hat ein Vektor einen Betrag von 1 nennt man den Vektor Einheitsvektor. Man erhält zu jedem Vektor den Einheitsvektor, wenn man ihn durch seinen Betrag dividiert.

Aus \vec{u} erhält man den Einheitsvektor \vec{u}_0 durch:

$$\vec{u}_0 = \vec{u} \cdot \frac{1}{|\vec{u}|}$$

Notizen:



Aufgabe 2:

Du kennst die Punkte A und B. Bestimme den Verbindungsvektor, den zugehörigen Betrag und den Einheitsvektor.

$$A(5|4|1) \quad B(7|-2|0)$$



Kollinearität von Vektoren

Zwei Vektoren sind kollinear (Vielfache voneinander), wenn gilt:

$$\vec{a} = z \cdot \vec{b} \quad \text{mit } z \in \mathbb{R}$$

Dann sind beide Vektoren parallel.

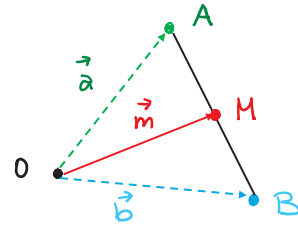
Mittelpunkt einer Strecke

Wenn du die Strecke zwischen den Punkten A und B betrachtest ist der Ortsvektor für den Mittelpunkt M:

$$\vec{OM} = \vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

Allgemein gilt für die Koordinaten von M:

$$M \left(\frac{1}{2}(a_1+b_1) \mid \frac{1}{2}(a_2+b_2) \mid \frac{1}{2}(a_3+b_3) \right)$$



Aufgabe 3: Du hast die Eckpunkte eines Dreiecks gegeben:

$$A(2 \mid -1 \mid 3), \quad B(-3 \mid 5 \mid -2), \quad C(-6 \mid -7 \mid 3)$$

Wie muss man den Punkt D wählen, damit ein Parallelogramm ABCD entsteht?

Wo liegt der Mittelpunkt des Parallelogramms?



Notizen:



Lesson 14

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren berechnest du über:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

Im zweidimensionalen Raum gilt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

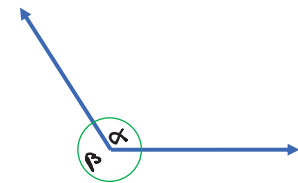
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Im dreidimensionalen Raum gilt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Winkel zwischen Vektoren

Grundsätzlich ist mit dem Winkel Alpha zwischen zwei Vektoren der kleinere Winkel gemeint (Alpha liegt also zwischen 0° und 180°). Dann berechnest du den Winkel wie folgt:



Im zweidimensionalen Raum:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Im dreidimensionalen Raum:

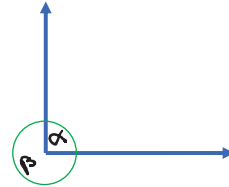
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Alpha berechnest du dann, indem du \cos^{-1} von dem Ergebnis ausrechnest. Denkt daran, den Taschenrechner auf „Degree“ einzustellen.

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn deren Skalarprodukt Null ergibt. Es muss also gelten:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Dann stehen die beiden Vektoren im rechten Winkel zueinander (90° Winkel).



Aufgabe 4: Berechne den Winkel zwischen folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Normalenvektor

\vec{n} ist ein Normalenvektor für \vec{a} und \vec{b} , wenn die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} linear unabhängig sind, \vec{n} orthogonal zu beiden ist und $\vec{n} \neq 0$ ist.

Es gibt 2 Möglichkeiten \vec{n} zu bestimmen:

Mit dem Skalarprodukt

$$\vec{n} \text{ ist orthogonal zu } \vec{a} \text{ und zu } \vec{b}: \quad \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \quad \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$$

Es entsteht ein LGS mit 2 Gleichungen und 3 Variablen. Der Normalenvektor ist also nicht eindeutig bestimmt. Wähle einen Wert für n_3 und berechne für diesen Wert n_1 und n_2 .

Dein Ergebnis ist ein möglicher Normalenvektor.

Beispiel für die Bestimmung von \vec{n} mit dem Skalarprodukt:

Bestimme \vec{n} für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{I: } 3n_1 + 4n_2 + 2n_3 = 0$$

$$\text{II: } -1n_1 + 5n_2 - 3n_3 = 0$$

$$\text{I: } 3n_1 + 4n_2 + 2n_3 = 0$$

$$\text{III: } 19n_2 - 7n_3 = 0 \quad \text{III} = \text{I} + \text{II} \cdot 3$$

Wähle einen Wert für n_3 .

Für $n_3 = 1$ gilt:

$$n_2 = \frac{7}{19} \quad \text{und} \quad n_1 = -\frac{22}{19}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -22/19 \\ 7/19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Möglichkeit \vec{n} zu bestimmen:

Mit dem Vektorprodukt / Kreuzprodukt

Gleichung für Normalenvektor:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

Ermittle \vec{n} mit dem Kreuzprodukt für:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$



Flächenberechnung

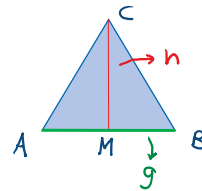
Den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnest du über: $A = \frac{1}{2} g \cdot h$

Wobei g die Grundseite und h die Höhe des Dreiecks ist.

- Für ein gleichschenkliges Dreieck:

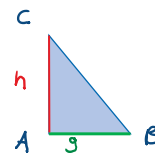
Wenn gilt $|\vec{AC}| = |\vec{BC}|$ nimmst du AB als Grundseite
Wenn M die Mitte von AB ist ist $h = |\vec{MC}|$.

$$g = |\vec{AB}|$$



- Für ein rechtwinkliges Dreieck:

Liegt bei A ein rechter Winkel nimmst du AB
als Grundseite. Die Höhe ist dann $|\vec{AC}|$
 $g = |\vec{AB}|$



Prüfe bei einer Aufgabe also immer zuerst, ob einer der beiden Fälle vorliegt!

Aufgabe 6:

Prüfe, ob das Dreieck ABC gleichschenkelig ist und berechne den Flächeninhalt für A(7|3|5), B(4|2|5) und C(5|4|3).



Volumen

Das Volumen einer Pyramide berechnest du über $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Dabei ist G die Grundfläche und h die Höhe.

Die Grundfläche ist häufig ein Quadrat, Parallelogramm oder Rechteck.

Prüfe vor der Rechnung, ob die Grundfläche eine besondere Lage hat. Liegt sie zum Beispiel in der $x_1 x_2$ -Ebene ist die Höhe der Pyramide genau die x_3 -Koordinate der Spitze der Pyramide.

Aufgabe 7:

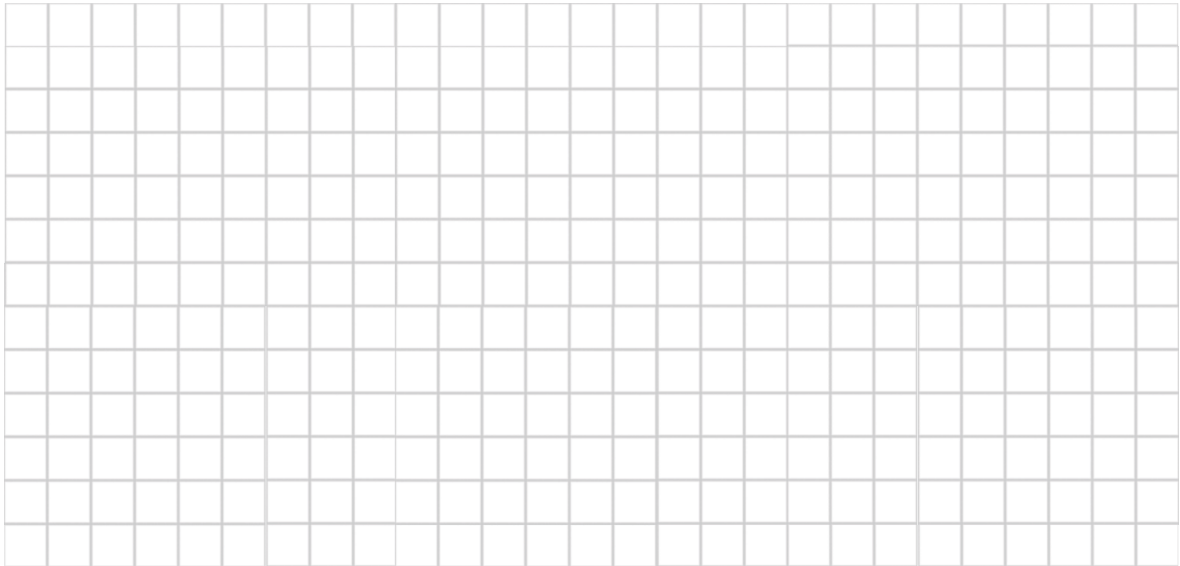
Die Eckpunkte der Grundfläche einer Pyramide sind gegeben durch A(5|4|-1), B(1|8|1), C(-1|4|5) und D(3|0|3). Die Spitze liegt im Punkt S(6|6|6). Berechne das Volumen der Pyramide.



Notizen:



Notizen:



Lesson 15

Geraden im Raum

Geradengleichungen - Parameterform

Wenn du 2 Punkte kennst, die auf der Geraden liegen, dann kannst du den Ortsvektor des einen als Stützvektor nehmen und den Verbindungsvektor als Richtungsvektor nutzen.

Stützvektor: $\vec{a} = \vec{OA}$

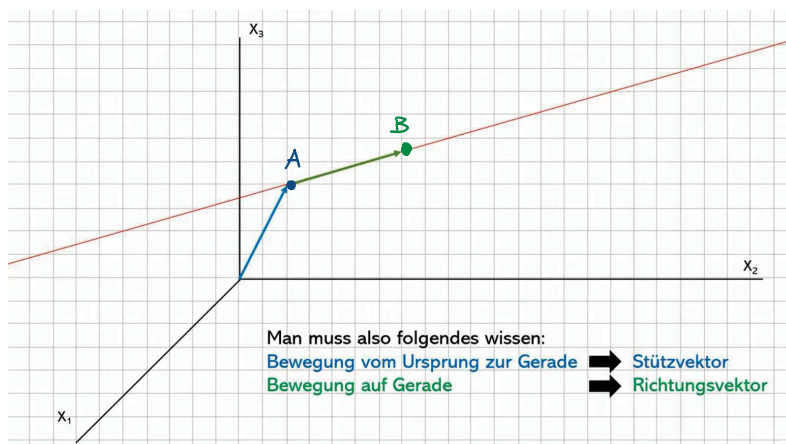
Richtungsvektor: $\vec{v} = \vec{AB}$

Dann gilt:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in \mathbb{R}$$

bzw.:

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



Hast du keine 2 Punkte auf der Geraden gegeben, aber einen Punkt und einen Vektor, der irgendwo auf der Geraden liegt, dann kannst du den Ortsvektor des Punktes als Stützvektor nehmen und den gegebenen Vektor als Richtungsvektor nutzen.

Stützvektor: $\vec{a} = \vec{OA}$

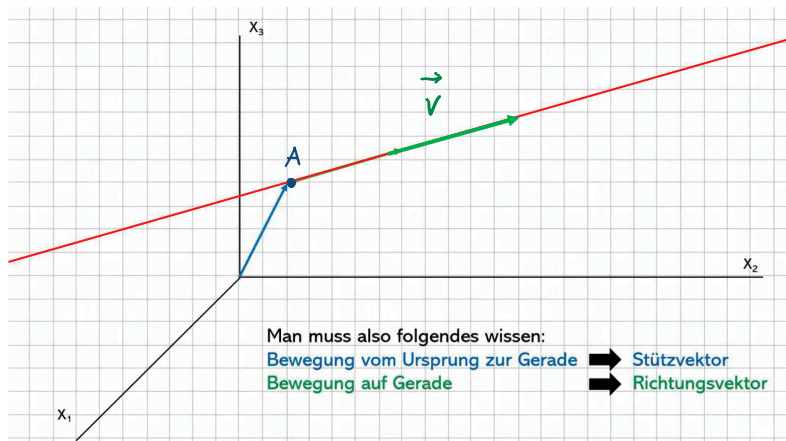
Richtungsvektor: \vec{v}

Dann gilt:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in \mathbb{R}$$

bzw.:

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$



Im zweidimensionalen Raum gilt:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in \mathbb{R}$$

bzw.:

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Punktprobe:

Sollst du einen bestimmten Punkt bestimmen, der auf der Geraden liegt, kannst du einfach einen Wert für den Parameter r einsetzen und die Koordinaten von \vec{x} ausrechnen. Das ist dann der Ortsvektor eines Punktes, der auf der Geraden liegt.

Sollst du prüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Geraden liegt, setzt du die gegebenen Koordinaten für \vec{x} ein. Schreibe die Vektorgleichung in ein LGS um. Gibt es einen Wert für r , der alle drei Gleichungen löst? Dann liegt der Punkt auf der Geraden – sonst nicht.

Aufgabe 8:

Gegeben sind die Punkte $A(-1 | 4 | 2)$ und $B(3 | -7 | 5)$. Stelle die Gleichung einer Geraden g auf (in Parameterform), die durch diese Punkte verläuft und prüfe, ob der Punkt $C(1 | 1 | 2)$ auf dieser Geraden liegt.



Lesson 16

Ebenen im Raum

Ebenengleichungen - Parameterform

Für eine Ebenengleichung benötigst du einen Stützvektor und zwei Spannvektoren. Diese dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

Stützvektor: $\vec{a} = \vec{OA}$,
Spannvektoren: $\vec{u} = \vec{AB}$,
 $\vec{v} = \vec{AC}$

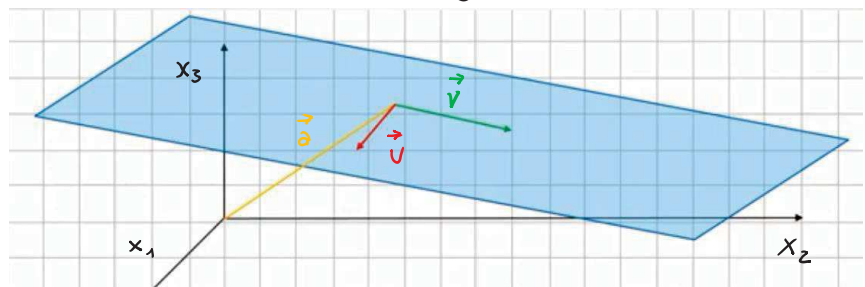
$$E: \vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC}$$

bzw.:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

bzw.:

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



Eine Ebenengleichung E kannst du aufstellen:

- Wenn du drei Punkte gegeben hast, die in der Ebene liegen

Dann nimmst du den Ortsvektor des einen Punktes als Stützvektor und zwei Verbindungsvektoren zwischen den Punkten als Spannvektoren.

Beispiel: In der Ebene liegen $A(1|1|1)$, $B(-5|7|10)$ und $C(1|-3|6)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stützvektor: } \vec{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{Spannvektor 1: } \vec{u} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 - 1 \\ 7 - 1 \\ 10 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \text{Spannvektor 2: } \vec{v} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ -3 - 1 \\ 6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array} \right\} E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Wenn du eine Gerade und einen Punkt gegeben hast, die in der Ebene liegen

Dann nimmst du den Ortsvektor der Geradengleichung als Stützvektor, den Richtungsvektor aus der Geradengleichung als einen Spannvektor und den Verbindungsvektor zwischen dem Punkt des Ortsvektors und dem gegebenen Punkt als zweiten Spannvektor.

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A(0|1|8)$ liegen in Ebene.
 Stützvektor \swarrow \swarrow Spannvektor 1

Spannvektor 2: $\left. \begin{pmatrix} 0 & - & 1 \\ 1 & - & 2 \\ 8 & - & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Wenn du zwei Geraden gegeben hast, die sich im Punkt S schneiden und in der Ebene liegen

Dann nimmst du den Ortsvektor von S als Stützvektor und die beiden Richtungsvektoren der Geraden als Spannvektoren.

Beispiel:

Gegeben sind die Geraden g und h , die in der Ebene liegen und sich im Punkt $S(3|-1|2)$ schneiden.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Wenn du zwei Geraden gegeben hast, die parallel verlaufen und in der Ebene liegen

Dann nimmst du von einer Gerade den Ortsvektor als Stützvektor und den Richtungsvektor als Spannvektor. Von beiden Geraden betrachtest du die zugehörigen Punkte der Stützvektoren und berechnest zwischen diesen den Verbindungsvektor als zweiten Spannvektor.

Beispiel:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Spannvektor:

$\begin{pmatrix} 1 & - & 1 \\ -5 & - & (-1) \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9: Gegeben sind zwei echt parallel verlaufende Geraden, die beide in einer Ebene E liegen. Bestimme eine Ebenengleichung in Parameterform für E.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Ebenengleichungen - Koordinatenform

Allgemeine Form der Koordinatengleichung einer Ebene:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$$

Wenn du drei Punkte kennst, die in der Ebene liegen, dann hast du mehrere Möglichkeiten:

1. Schreibe die Gleichung in Parameterform. Schreibe aus dieser Gleichung ein LGS und eliminiere dann die beiden Parameter dieser Gleichungen.

2. Setze die drei bekannten Punkte in die Gleichung ein, bilde daraus ein LGS. Du erhältst ein LGS für a_1 , a_2 , a_3 und b . Bringe das LGS in die Stufenform und drücke dann alle Variablen in Abhängigkeit von b aus. Wähle einen Wert für b und bestimme in Abhängigkeit von diesem Wert die anderen Werte.

3. Ermittle eine Gleichung in Normalenform und schreibe die in die Koordinatenform um. Dafür brauchst du zuerst den Normalenvektor.

[Aus der Koordinatengleichung kann man einen Normalenvektor der Ebene direkt ablesen durch a_1 , a_2 und a_3]

Ebenengleichungen - Normalenform

Normalenform einer Ebenengleichung:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \vec{n} = 0$$

- \vec{p} ist ein Stützvektor
- \vec{n} ist ein Normalenvektor
- \vec{x} ist der Ortsvektor eines Punktes in der Ebene

Das Produkt muss 0 sein, weil der Verbindungsvektor in der Ebene orthogonal sein muss zu \vec{n} .

Diese Form der Ebenengleichung hat den Vorteil, dass du einen Normalenvektor direkt aus der Gleichung ablesen kannst.

Hesse'sche Normalenform:

Diese liegt vor, wenn \vec{n}_0 ein Normalen-Einheitsvektor ist (Normalenvektor mit Betrag 1).

[Das ist hilfreich für die Bestimmung des Abstandes zwischen Punkt und Ebene]

Die Hesse'sche Normalenform in vektorieller Darstellung ist:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \vec{n}_0 = 0$$

Die Hesse'sche Normalenform in Koordinatendarstellung ist:

$$\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = 0$$

Notizen:



Lage von Geraden & Ebenen

Für Geraden gilt:

- Die Gerade verläuft immer durch den Punkt, dessen Ortsvektor der Stützvektor ist.

Beispiel: Ist der Stützvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, verläuft die Gerade durch den Punkt (0|0|0).

- Gilt für den Richtungsvektor, dass $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann verläuft die Gerade parallel zur x_1 -Achse.
- Die Gerade verläuft parallel zur x_2 -Achse für $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Entsprechend verläuft die Gerade parallel zur x_3 -Achse für $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_3 \end{pmatrix}$

Für Ebenen in Parametergleichung gilt:

- Die Ebene verläuft immer durch den Punkt, dessen Ortsvektor der Stützvektor ist. Beispiel: Ist der Stützvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, verläuft die Ebene durch den Punkt (0|0|0).

Sind die Spannvektoren \vec{u} und \vec{v} , dann gilt:

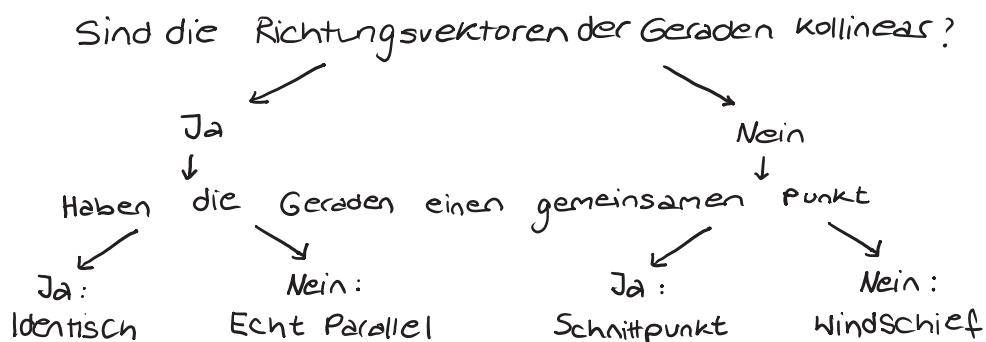
- Haben u_1 und v_1 beide den Wert 0, ist die Ebene parallel zur x_2x_3 -Ebene.
- Haben v_1 und v_2 beide den Wert 0, ist die Ebene parallel zur x_3 -Achse

Für Ebenen in Koordinatenform gilt:

- Fehlt eine Koordinate ist die Ebene zu dieser Achse parallel
- Fehlen zwei Variablen ist die Ebene zu Parallel zu der Koordinatenebene zwischen den beiden entsprechenden Achsen der fehlenden Variablen

Gegenseitige Lage von Geraden

Befinden sich im Raum 2 Geraden und du sollst deren Lage zueinander bestimmen gilt:



Sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander:



Liegt nur ein Punkt auf beiden Geraden, dann wissen wir, dass die Geraden identisch sind und nicht echt parallel sein können (da die Geraden gleich verlaufen).



Setze irgendeinen Punkt, der auf der einen Geraden liegt, in die zweite Geradengleichung ein und prüfe, ob der Punkt auch auf dieser Geraden liegt.

Sind die Richtungsvektoren kein Vielfaches voneinander:



Wir prüfen, ob die Geraden sich schneiden. Dazu setzen wir die Geradengleichungen gleich und bestimmen die beiden unbekannt Parameter.



Haben die Geraden keinen Schnittpunkt, sind sie windschief.

Aufgabe 10:

Es sind die Geradengleichungen $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

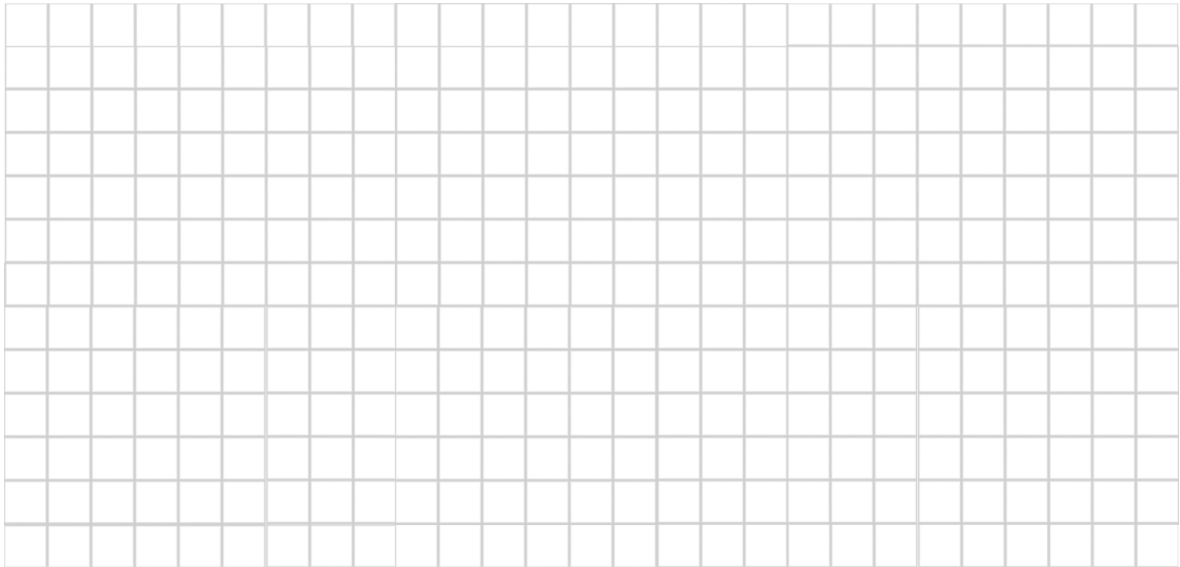
$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ gegeben. Wie stehen g und h zueinander?



Notizen:



Notizen:



Aufgabe 11:

Es sind die Geradengleichungen $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

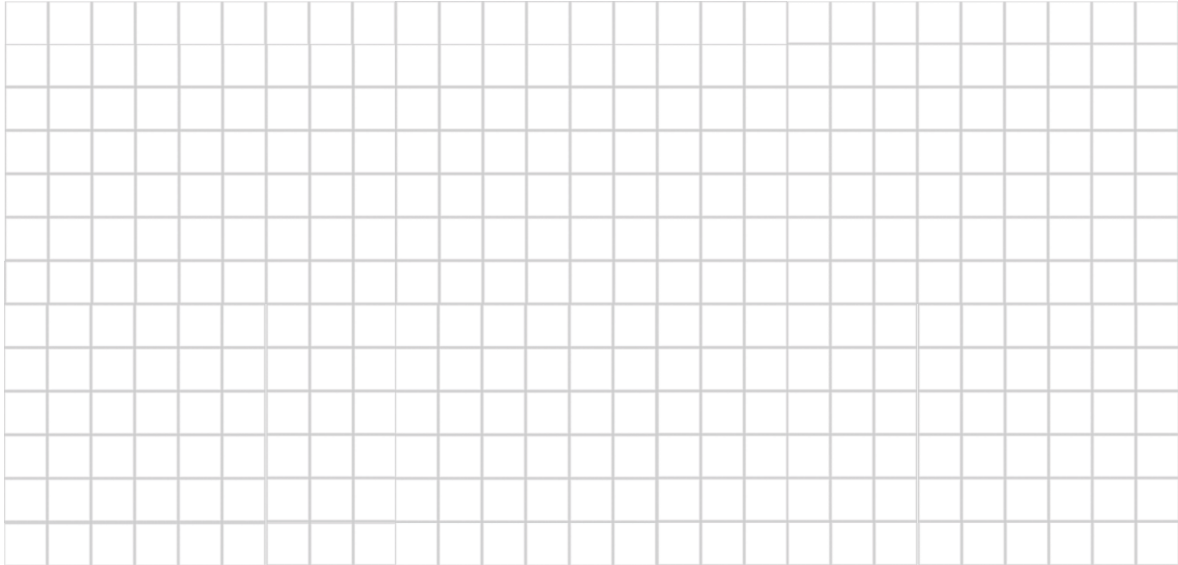
$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Wie stehen i und j zueinander?



Notizen:



Notizen:



Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

Für die gegenseitige Lage von der Geraden g und der Ebenen E gibt es 3 Optionen:

- E und g schneiden sich
- E und g verlaufen echt parallel
- g liegt in E

Welche Situation vorliegt kannst du wie folgt prüfen:

- Ist die Ebene in Koordinatenform gegeben, dann bildest du aus der Geradengleichung ein LGS. Die Gleichungen für x_1 , x_2 und x_3 aus diesem LGS setzt du in die Gleichung für die Ebene ein. Dann kannst du die Gleichung für den Parameter lösen.
 - Hat die Gleichung keine Lösung \rightarrow falsche Aussage \rightarrow Gerade & Ebene sind parallel
 - Hat die Gleichung eine Lösung \rightarrow du kennst den Parameter \rightarrow setze den in die Gleichung ein & berechne den Schnittpunkt
 - Hat die Gleichung unendlich viele Lösungen \rightarrow dann verläuft die Gerade in der Ebene

- Ist die Ebene in Parameterform gegeben, setzt du die Geradengleichung mit der Gleichung für die Ebene gleich.

(Gegebenenfalls solltest du das entstehende LGS mit dem Taschenrechner lösen.)

So erhältst du Werte für die Parameter in beiden Gleichungen.

Wenn du diese Ergebnisse in eine Gleichung einsetzt erhältst du den Ortsvektor des Punktes, in dem sich die Gerade und die Ebene schneiden.

Aufgabe 12:

Untersuche die gegenseitige Lage in folgenden Fällen:

$$1) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$E: x_1 + x_2 - 3x_3 = 4$$

$$2) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Notizen:

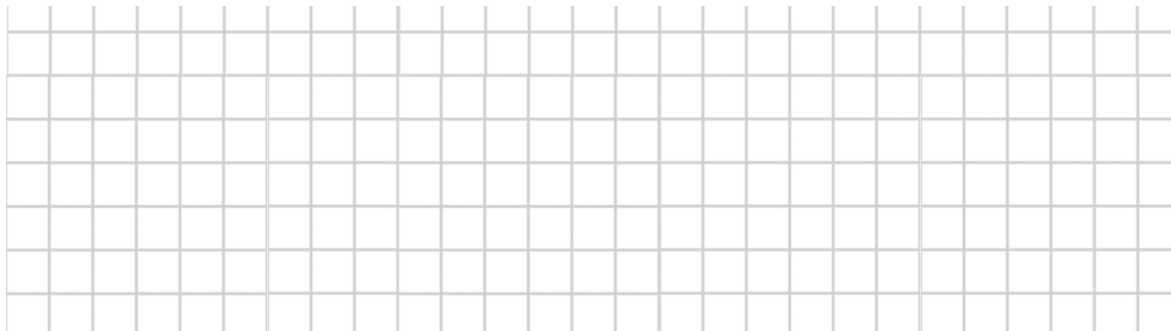


Aufgabe 13:

Untersuche die gegenseitige Lage der Ebenen

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , r, s \in \mathbb{R}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , t, u \in \mathbb{R}$$



Notizen:



Notizen:



Lesson 17

Schnittwinkel und Abstandsberechnungen

Abstand Punkt - Ebene

Um den Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene aufzustellen ist die Hesse'sche Normalenform der Ebene aufzustellen und dann sind die Koordinaten des Punktes in die Gleichung einzusetzen.

Allgemein kannst du aber den Abstand zwischen Punkt P und Ebene E auch einfach mit der Gleichung bestimmen (dann brauchst du die Schritte oben nicht einzeln ausführen):

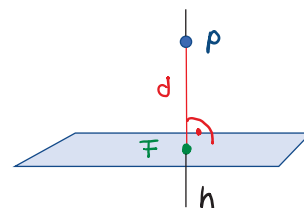
Für $P(p_1, p_2, p_3)$ und $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ gilt:

$$d(P; E) = \left| \frac{a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \rightarrow \text{Der Abstand kann nicht negativ sein!}$$

Ist nicht nur der Abstand, sondern auch der Lotfußpunkt gesucht gehst du wie folgt vor:

Der Lotfußpunkt F ist der Punkt auf einer Gerade oder Ebene, der den geringsten Abstand zum gegebenen Punkt P hat. Der Abstand d ist dann immer senkrecht zur Gerade bzw. Ebene.

$$d = |\vec{PF}|$$



- ① Man ermittelt F mit einer Hilfsgeraden h , die d verlängert.
 h geht durch P und ist orthogonal zu E .

Stützvektor $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Normalenvektor von E

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Wenn $E: \vec{x} = ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ dann erhält man daraus den Normalenvektor.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = p_1 + at \\ x_2 = p_2 + bt \\ x_3 = p_3 + ct \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{In Gleichung für } E \text{ einsetzen.} \\ \downarrow \\ \text{t ausrechnen \& in } h \text{ einsetzen} \end{array}$$

Man erhält den Ortsvektor von F .

$$\text{Dann gilt: } d(P; E) = |\vec{PF}|$$

Aufgabe 14:

Gegeben sind der Punkt P und die Ebene E . Berechne den entsprechenden Lotfußpunkt und den Abstand zwischen beiden.

$$P(3| -3| 1) \quad \text{und} \quad E: 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -28$$



Notizen:



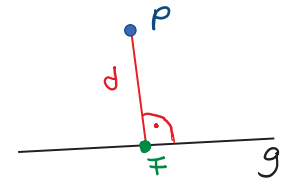
Abstand Punkt - Gerade

Um den Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g zu berechnen, bestimmst du wieder erst den Lotfußpunkt F und berechnest dann den Abstand zwischen P und F.

\vec{PF} ist orthogonal zum Richtungsvektor von g.

Für $g: \vec{x} = \vec{s} + t \cdot \vec{u}$ gilt also: $\vec{PF} \cdot \vec{u} = 0$

Für die Bedingung kannst du t berechnen und für t kannst du den Lotfußpunkt bestimmen.



Alternativ: Man kann auch eine Hilfsebene aufstellen.
Die verläuft wie d durch P und orthogonal zu g.
→ Schnittpunkt Gerade - Ebene berechnen.

Aufgabe 15:

Berechne den Abstand zwischen Punkt P und der Geraden g.

$$P(1|2|4) \quad , \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$



Notizen:



Abstand Gerade - Gerade

Den Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden g und h kann man mit folgender Formel berechnen:

$$d(g; h) = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$$

Wenn gilt: $g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$, $h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$
 \vec{n}_0 ist ein Einheitsvektor, der orthogonal zu \vec{u} & \vec{v} ist.

Alternative 1: Der Abstand kann beispielsweise auch mit einer Hilfsebene berechnet werden, was aber länger dauert und anfälliger für Fehler ist.

Alternative 2: Wenn man einen Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten von g und h kennt (z.B. Punkte A und B) und der Vektor ist orthogonal zu den Richtungsvektoren beider Geraden, dann gilt: $d(g; h) = |\vec{AB}|$

Dann kann man die Lotfußpunkte A und B berechnen, indem man ein LGS mit folgenden Bedingungen aufstellt:

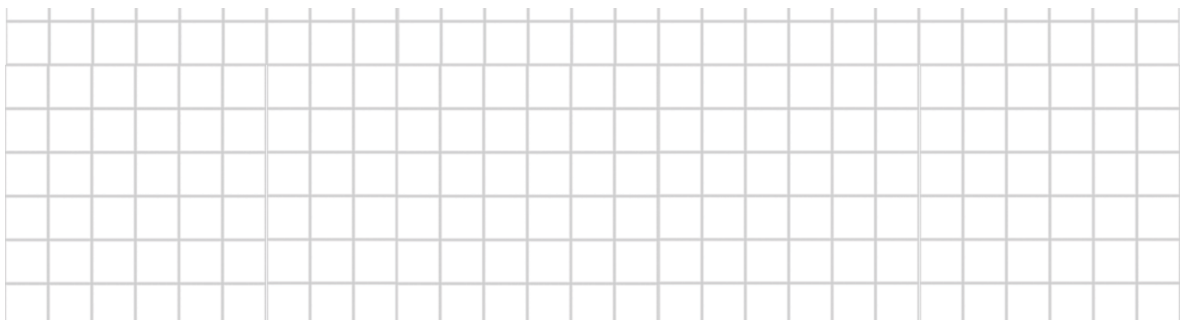
$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{u} &= 0 && \rightarrow \text{wenn } \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ die Richtungsvektoren beider Geraden sind.} \\ \vec{AB} \cdot \vec{v} &= 0 && \rightarrow \text{Bestimme die Parameter und dann A und B.} \end{aligned}$$

Aufgabe 16:

Berechne den Abstand zwischen den Geraden g und h .

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Notizen:



Umgekehrte Abstandsaufgabe

Bei umgekehrten Abstandsaufgaben hast du eine Geradengleichung g , einen Punkt P und einen bestimmten Abstand gegeben und sollst die Punkte auf der Geraden bestimmen, die den gegebenen Abstand zum Punkt P haben.

Es gibt zwei Möglichkeiten, die gesuchten Punkte zu finden:

Möglichkeit 1:

Man bestimmt den Verbindungsvektor zwischen beiden Punkten allgemein in Abhängigkeit vom Parameter. Dann setzt man den Betrag des Vektors mit dem gegebenen Abstand gleich.

Aufgabe 17:

(Möglichkeit 1)

Bestimme alle Punkte auf der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$, die einen Abstand von 15 Einheiten zum

Punkt $A(10|11|9)$ haben.



Notizen:



Möglichkeit 2:

Man kann aus dem Richtungsvektor der Geradengleichung den zugehörigen Einheitsvektor berechnen. Soll der gesuchte Punkt einen Abstand von d vom gegebenen Punkt haben, dann hat auch der Ortsvektor des gesuchten Punktes den Abstand d vom gegebenen Punkt. Es muss also gelten

$$\vec{OP} = \vec{OA} \pm d \cdot \vec{v}_0$$

- P ist der gesuchte Punkt
- A ist der gegebene Punkt
- \vec{v}_0 ist der Einheitsvektor von dem Richtungsvektor der Geradengleichung

Aufgabe 18:

(Möglichkeit 2)

Bestimme alle Punkte auf der Geraden

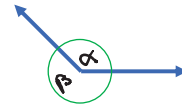
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$, die einen Abstand von 15 Einheiten zum

Punkt $A(10| -1| 9)$ haben mithilfe des Einheitsvektors.

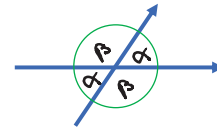


Schnittwinkel

- Winkel zwischen Vektoren: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
Es muss gelten $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$



- Schnittwinkel zwischen Geraden:
Entsteht wenn sich zwei Geraden schneiden
Also muss gelten $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$

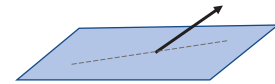


\vec{u} und \vec{v} sind die Richtungsvektoren der Geraden

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Vor Berechnung des Schnittwinkels muss man prüfen, ob die Geraden sich überhaupt schneiden!

- Schnittwinkel zwischen Gerade g und Ebene E:



Option 1:

Um den Schnittwinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene zu bestimmen, leitet man eine Ebene F her, die orthogonal zu E verläuft und die Gerade g enthält. Dann ermittelt man zuerst die Schnittgerade s zwischen den beiden Ebenen. Das ermöglicht einem, den Schnittwinkel zwischen g und s bestimmen.

Option 2:

Richtungsvektor von g: \vec{u} $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

Normalenvektor von E: \vec{n} $\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$

- Schnittwinkel zwischen Ebenen

Der Winkel zwischen den beiden Ebenen entspricht genau dem Winkel zwischen zwei Normalenvektoren zu beiden Ebenen.

\vec{n}_E ist ein Normalenvektor der Ebene E

\vec{n}_F ist ein Normalenvektor der Ebene F

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$$

Lesson 18

Matrizen

- Allgemeine Form: $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

- Eine Matrix hat m Zeilen und n Spalten und enthält somit $m \cdot n$ Zahlen

- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Addition

Wenn zwei Matrizen gleich aufgebaut sind kann man sie addieren. Dabei wird jedes einzelne Element addiert.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+(-2) & 0+7 \\ 2+3 & 3+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Subtraktion

Wenn zwei Matrizen gleich aufgebaut sind kann man sie subtrahieren. Dabei werden die einzelnen Elemente subtrahiert.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-(-2) & 0-7 \\ 2-3 & 3-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Multiplikation

- Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Um eine Zahl mit einer Matrix zu multiplizieren, multiplizierst du einfach jede Zahl innerhalb der Matrix einzeln mit dem Vorfaktor

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = 2 \cdot A$$

$$B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -8 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Multiplikation mehrerer Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 & 16 & -11 \\ 26 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Du schreibst die Matrizen in Tabellenform und multiplizierst eine Spalte mit einer Zeile um auf die entsprechende Zahl in der Tabelle zu kommen

$$0 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 19$$

	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 & 16 & -11 \\ 26 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Du schreibst die Matrizen in Tabellenform und multiplizierst eine Spalte mit einer Zeile um auf die entsprechende Zahl in der Tabelle zu kommen

$$0 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 19$$

$$0 \cdot (-2) + 8 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 = 16$$

$$0 \cdot 4 + 8 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = -11$$

Lösungen der Aufgaben

Lösung Aufgabe 1

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 + 1 \\ 2 + 2 \\ 6 + (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 - 1 \\ 2 - 2 \\ 6 - (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 2

Verbindungsvektor:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -7 - 5 \\ -2 - 4 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

Betrag:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{41}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v} \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 3

Parallelogramm:
Gegenüberliegende
Seiten sind
parallel &
gleich lang.

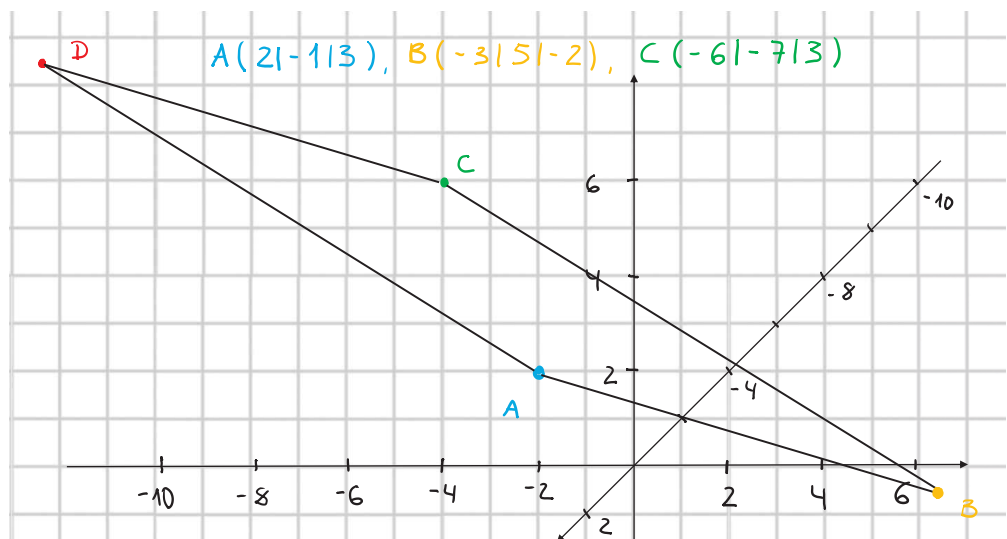
Es muss gelten:

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\vec{BA} = \vec{CD}$$

$$\vec{AD} = \vec{BC}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} \\ = \vec{OA} + \vec{BC}$$



$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 - (-3) \\ -7 - 5 \\ 3 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Es gilt also: $D(-1 | -13 | 8)$

Der Mittelpunkt des Parallelogramms entspricht dem Mittelpunkt der Strecke von A nach C / dem Mittelpunkt der Strecke von B nach D (also dem Mittelpunkt einer der Diagonalen)

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 - 2 \\ -7 - (-1) \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Also gilt: $M(-2 | -4 | 3)$

Lösung Aufgabe 4

Berechne den Winkel zwischen folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} \approx 0,45$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0,45) \approx 63,26^\circ$$

Lösung Aufgabe 5

Ermittle \vec{n} für:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 6

A(7|3|5), B(4|2|5) und C(5|4|3)

Um zu prüfen, ob das Dreieck gleichschenkelig ist müssen wir die Seitenlängen, also die Beträge der Vektoren vergleichen.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-7 \\ 2-3 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5-7 \\ 4-3 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ 4-2 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$|\vec{AC}| = |\vec{BC}| \rightarrow$ Wir nehmen AB als Grundseite

Die Höhe ist $|\vec{MC}|$

M ist die Mitte der Grundseite: $\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 2,5 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow M(5,5|2,5|5)$$

$$\vec{MC} = \begin{pmatrix} 5-5,5 \\ 4-2,5 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1,5 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{MC}| = \sqrt{(-0,5)^2 + 1,5^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{26}}{2} \approx 4,03 \text{ Flächeneinheiten}$$

Lösung Aufgabe 7

Zuerst brauchen wir den Flächeninhalt der Grundfläche. Dazu stellt sich die Frage, ob die Grundfläche eine bestimmte Form hat.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 8-4 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 2^2} = 6$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 4-8 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$$

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 3-4 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{CD}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 5$$

$$\vec{DA} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 4-0 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{DA}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$$

Alle Seiten der Grundfläche sind gleich lang. Die Grundfläche könnte zum Beispiel ein Quadrat sein. Dafür musste zwischen den Ecken ein rechter Winkel vorliegen. Wenn in einer Ecke ein rechter Winkel vorliegt muss die Grundfläche quadratisch sein. Wenn ein rechter Winkel zwischen zwei Vektoren vorliegt ist das Skalarprodukt 0.

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = (-4) \cdot (-2) + 4 \cdot (-4) + 2 \cdot 4 = 8 - 16 + 8 = 0$$

→ Die Grundfläche ist quadratisch.

$$\text{Flächeninhalt: } G = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| = 6 \cdot 6 = 36$$

Zur Berechnung der Höhe können wir prüfen, ob sich die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche befindet.

Mittelpunkt der Grundfläche:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 - 5 \\ 4 - 4 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ist die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche, dann gilt:

$$\vec{AM} \cdot \vec{MS} = 0 \rightarrow \text{Rechter Winkel}$$

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} 2 - 5 \\ 4 - 4 \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{MS} = \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 6 - 4 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{MS} = -3 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 0 \rightarrow \text{Es handelt sich um eine senkrechte Pyramide}$$

$$\text{Höhe der Pyramide: } |\vec{MS}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6 = h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6 = 72$$

Lösung Aufgabe 8

Geradengleichung aufstellen:

$$g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} \quad (\text{Es wäre z.B. auch } \vec{x} = \vec{OB} + r \cdot \vec{BA} \text{ richtig}).$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ -7 - 4 \\ 5 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

Punktprobe:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$1 = -1 + 4r \quad \Leftrightarrow r = 0,5$$

$$1 = 4 - 11r \quad \Leftrightarrow r = 3/11$$

$$2 = 2 + 3r \quad \Leftrightarrow r = 0$$

Gibt es einen Wert für r , der alle drei Gleichungen löst? Nein. Jede Gleichung wird durch einen anderen Wert für r gelöst, weshalb C nicht auf der Geraden g liegt.

Lösung Aufgabe 9

Gegeben sind zwei echt parallel verlaufende Geraden, die beide in einer Ebene E liegen. Bestimme eine Ebenengleichung in Parameterform für E .

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Stützvektor: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad 1. \text{ Spannvektor } \begin{pmatrix} 2,5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Spannvektor: } \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 1 \\ 0 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 10

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{gegeben}$$

Überprüfe, ob die beiden Richtungsvektoren kollinear sind:

$$\text{Richtungsvektor } g: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{Richtungsvektor } h: \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Damit die Vektoren kollinear sind muss gelten: } a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Wenn du daraus ein Gleichungssystem bildest, müssen alle Zeilen für den selben Wert von a lösbar sein.

Gleichungssystem:

I. $a \cdot 1 = 6$

II. $a \cdot 1 = 6$

III. $a \cdot 2 = 12 \quad | :2$

III. $a = 6$

Alle drei Zeilen des Gleichungssystems sind für den gleichen Wert $a = 2$ lösbar. Somit sind die Richtungsvektoren kollinear.

Wenn die Richtungsvektoren kollinear sind, können die Geraden entweder identisch oder parallel sein.

Überprüfe, ob ein Punkt auf beiden Geraden liegt: Du wählst einen Punkt, der auf der einen Gerade liegt und setzt den mit der anderen Gerade gleich.

Du kannst also den Ortsvektor eines bekannten Punktes einfach für \vec{x} einsetzen

Auf der Geraden h liegt in jedem Fall der Punkt $(0 \mid 0 \mid 8)$ und den setzen wir mit der Geradengleichung für g gleich.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt bildest du ein Gleichungssystem und löst jede Zeile einzeln. Wenn für jede Zeile der selbe Wert für r herauskommt, dann liegt der Punkt auf der Geraden und g und h sind identisch. Wenn für r verschiedene Werte raus kommen, liegt der Punkt nicht auf der Geraden und g und h sind echt parallel.

Gleichungssystem:

I. $0 = 3 + r \quad | -3$

II. $0 = 2 + r \quad | -2$

III. $8 = (-1) + r \quad | +1$

I. $-3 = r$

II. $-2 = r$

III. $9 = r$

Für 3 gleiche Werte von r \longrightarrow Die Geraden sind identisch

Für verschiedene Werte von r \longrightarrow Die Geraden sind echt parallel

Da verschiedene Werte für r rauskommen, liegt der Punkt nicht auf beiden Geraden. Damit sind die Geraden g und h echt parallel.

Lösung Aufgabe 1 1

Gegeben: $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Überprüfe, ob die beiden Richtungsvektoren kollinear sind:

Richtungsvektor i: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; Richtungsvektor j: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit die Vektoren kollinear sind muss gelten: $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wenn du daraus ein Gleichungssystem bildest, müssen alle Zeilen für den selben Wert von a lösbar sein.

Gleichungssystem:

- I. $a \cdot 1 = 1$
- II. $a \cdot 1 = 0$
- III. $a \cdot 1 = 1$

Da verschiedene Werte für a herauskommen, sind die Richtungsvektoren nicht kollinear.

Wenn die Richtungsvektoren nicht kollinear sind, können die Geraden entweder windschief sein oder sich schneiden.

- Überprüfe, ob die Geraden sich schneiden

Setze dafür die beiden Geradengleichungen gleich, bilde ein Gleichungssystem und löse dieses. Bestimme die beiden unbekannt Parameter r und s mit zwei Zeilen des Gleichungssystems und überprüfe mit der dritten.

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem:

- I. $2 + r = 2 + s$
- II. $2 + r = 3$ |-2
- III. $-1 + r = 4 + s$

II. $r = 1$

II. Einsetzen in I. :

$$2 + 1 = 2 + s$$

$$3 = 2 + s \quad |-2$$

$$1 = s$$

$r = 1$ und $s = 1$ zur Überprüfung in III. einsetzen:

[Beim Überprüfen setzt du die Werte für die beiden Parameter r und s in die ungenutzte Zeile ein]

$$\text{III.} \quad \begin{array}{r} -1 + 1 = 4 + 1 \\ 0 = 5 \end{array}$$

Da dies eine falsche Aussage ist, haben die Geraden i und j keinen Schnittpunkt und sind windschief. Wäre die Überprüfung in der dritten Zeile korrekt gewesen, hätten die beiden Geraden einen Schnittpunkt gehabt.

Ist die Aussage wahr \rightarrow Die Geraden schneiden sich
Ist die Aussage falsch \rightarrow Die Geraden sind windschief

Eine wahre Aussage ist zum Beispiel $3=3$ oder $5=5$ oder $27=27$.

Lösung zu Aufgabe 12

Lösung zu 1)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 + 3t \\ x_3 = 1 + t \end{array} \right\} \text{Gleichungen des LGS in Ebenengleichung einsetzen}$$

$$\begin{array}{r} 2 + 2 + 3t - 3 \cdot (1 + t) = 4 \\ \Leftrightarrow \quad \quad \quad 1 = 4 \end{array}$$

\rightarrow Das ist eine falsche Aussage.
 \rightarrow g verläuft echt parallel zu E

Lösung zu 2)

Gleichungen gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 6 + t = 4r + 2s \\ 3 + 2t = 3 - 3r + 2s \\ 12 + 2t = 1r - 3s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} t - 4r - 2s = -6 \\ 2t + 3r - 2s = 0 \\ 2t - r + 3s = -12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} t - 4r - 2s = -6 \\ 11r + 2s = 12 \\ 9s = -12 \end{array}$$

Daraus ergibt sich:

$$s = -\frac{4}{3}, r = \frac{4}{3}, t = -\frac{10}{3}$$

\rightarrow LGS eindeutig lösbar \rightarrow es gibt einen Schnittpunkt S :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} - \frac{10}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ -11/3 \\ 6/3 \end{pmatrix} \Rightarrow S \left(\frac{8}{3} \mid -\frac{11}{3} \mid \frac{16}{3} \right)$$

→ LGS eindeutig lösbar → es gibt einen Schnittpunkt S:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} - \frac{10}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ -11/3 \\ 6/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{8}{3} \mid -\frac{11}{3} \mid \frac{16}{3}\right)$$

Lösung Aufgabe 13

Bilde aus einer Gleichung die Koordinatenform

Wir brauchen einen Normalenvektor von E_1 :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenform: } E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Normalenform in Koordinatenform durch Ausmultiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \text{Skalarprodukt}$$

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2 - 4 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10 \quad \Rightarrow \text{Koordinatenform}$$

Aus E_2 wissen wir:

$$x_1 = 1 - t + 4u$$

$$x_2 = -1 + 2t + u$$

$$x_3 = 1 + 2t + 2u$$

} Einsetzen in Koordinatenform

$$1 - t + 4u - 4 \cdot (-1 + 2t + u) + 2 \cdot (1 + 2t + 2u) = 10$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}t$$

$u = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}t \rightarrow$ Wenn man den Wert für u in die

Gleichung für E_2 ein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}t\right) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0,25 \\ 2,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3,25 \\ 4,5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Gleichung der Schnittgeraden

Alternativ – wenn man einen grafikfähigen Taschenrechner hat:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

\rightarrow LGS z.B. mit Matrixschreibweise mit Taschenrechner lösen.

Man erhält eine Gleichung für t und u , die man in E_2 einsetzt für die Schnittgerade.

Lösung Aufgabe 14

Hilfsgerade h aufstellen:

$$P(3|-3|1) \quad \text{und} \quad E: 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -28$$

\downarrow
 \vec{OP} ist Stützvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Lotfußpunkt bestimmen: h und E schneiden sich in F .

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 3 + 2t \\ x_2 = -3 - 6t \\ x_3 = 1 + 3t \end{array} \right\} \text{In Gleichung für } E \text{ einsetzen.}$$

$$2 \cdot (3+2t) - 6(-3-6t) - 3(1-3t) = 28$$

$$\Leftrightarrow t = -1$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{OF} \rightarrow F(1|3|4)$$

Abstand berechnen:

$$\vec{PF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow d = |\vec{PF}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 3^2} = 7$$

Lösung Aufgabe 15

F ist der Lotfußpunkt und liegt auf g. Also muss gelten:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow F(6+2t|-1-t|3+t)$$

$$\text{Dann gilt für } \vec{PF}: \vec{PF} = \begin{pmatrix} 6+2t-1 \\ -1-t-2 \\ 3+t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2t \\ -3-t \\ -1+t \end{pmatrix}$$

\vec{PF} ist orthogonal zum Richtungsvektor von g:

$$\begin{pmatrix} 5+2t \\ -3-t \\ -1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$2 \cdot (5+2t) - 1 \cdot (-3-t) + (-1+t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -2$$

$$F(6+2t|-1-t|3+t) \text{ für } t = -2:$$

$$F(6+2 \cdot (-2)|-1-(-2)|3-2)$$

$$F(2|1|1)$$

$$\text{Abstand: } \vec{PF} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{PF}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11} = d(P;g)$$

Lösung Aufgabe 16

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Benötigte Gleichung: } d(g; h) = \left| \left(\vec{q} - \vec{p} \right) \cdot \vec{n}_0 \right|$$

\vec{n}_0 bestimmen:

\vec{n}_0 ist ein Einheitsvektor, der orthogonal zu \vec{u} & \vec{v} ist.

$$\text{Also gilt: } \begin{aligned} -1 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 &= 0 \\ 3n_1 - 2n_2 - 2n_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Wir setzen } n_2 = 2 \text{ und dann gilt } n_1 = 2 \text{ und } n_3 = 1 \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$|\vec{n}| = 3 \rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d(g; h) &= \left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \left| \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot 1) \right| = |-2| = 2 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 17

Möglichkeit 1: AUFGABE

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 + 4s \\ x_2 &= -1 + 0s \\ x_3 &= 3 + 3s \end{aligned}$$

Für jeden Punkt auf g gilt: $P(2+4s | -1 | 3+3s)$.

$$\text{Für AP gilt dann: } \vec{AP} = \begin{pmatrix} 2+4s - 10 \\ -1 - (-1) \\ 3+3s - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+4s \\ 0 \\ -6+3s \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AP}| = \sqrt{(-8+4s)^2 + (-6+3s)^2} = \sqrt{64 - 64s + 16s^2 + 36 - 36s + 9s^2}$$

↖ Binom! ↗

$$= \sqrt{100 - 100s + 25s^2} = \sqrt{25 \cdot (s-2)^2}$$

$$|\vec{AP}| = 5 \cdot |s-2|$$

Der Abstand $|\vec{AP}|$ soll 15 sein: $5 \cdot |s-2| = 15$

$$s_1 = 5, s_2 = -1$$

Einsetzen in g :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -1 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow P_1 (22 | -1 | 18)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_2 (-2 | -1 | 0)$$

Lösung Aufgabe 18

Möglichkeit 2: AUFGABE

Richtungsvektor von g ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = 5$$

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{5} \cdot \vec{v} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dann muss gelten:

$$\vec{OP}_1 = \vec{OA} + 15 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + 15 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -1 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow P_1 (22 | -1 | 18)$$

$$\vec{OP}_2 = \vec{OA} - 15 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} - 15 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_2 (-2 | -1 | 0)$$