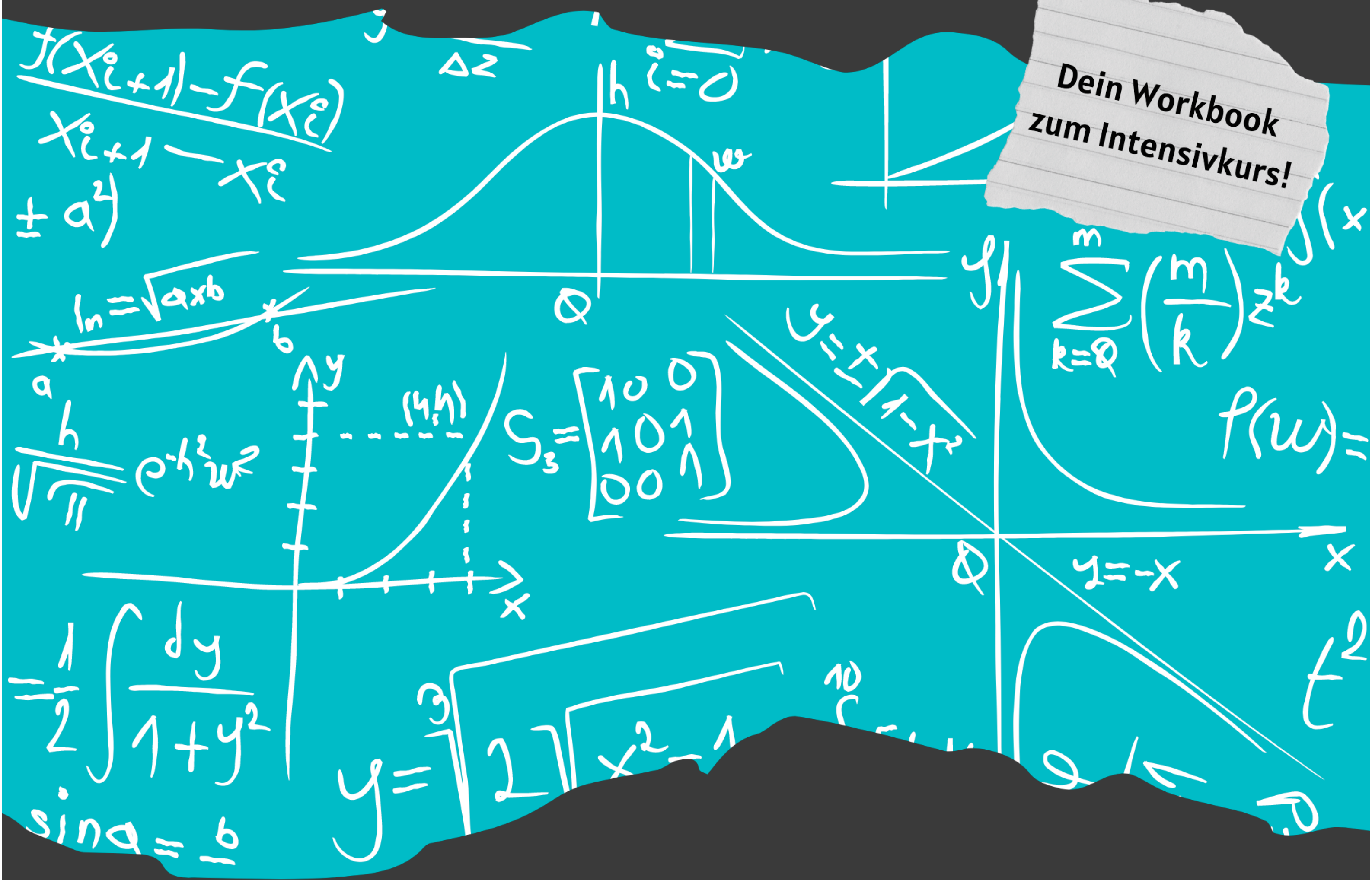
Intensivkurs – Mathe GK



Dein Workbook zum Intensivkurs!

Analysis

Abitur 2022

Lesson 01

Funktionsarten

Ganzrationale Funktionen

- Lineare Funktionen
- Quadratische Funktionen
- Potenzfunktionen

Allgemeine Funktionsgleichung ganzrationaler Funktionen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N},\ D_f = \mathbb{R})$$

Wird als ganzrationale Funktion oder Polynomfunktion n-ten Gerades bezeichnet

- <u>Definitionsmenge:</u>

Das ist die Menge aller Werte, die x annehmen kann

Aufgabe 1:

a) $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $f(x) = 2x^2 + 3x + 10$ $\rightarrow D_f = ?$

d) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ $\rightarrow D_f = ?$

Notizen:

Wertemenge:

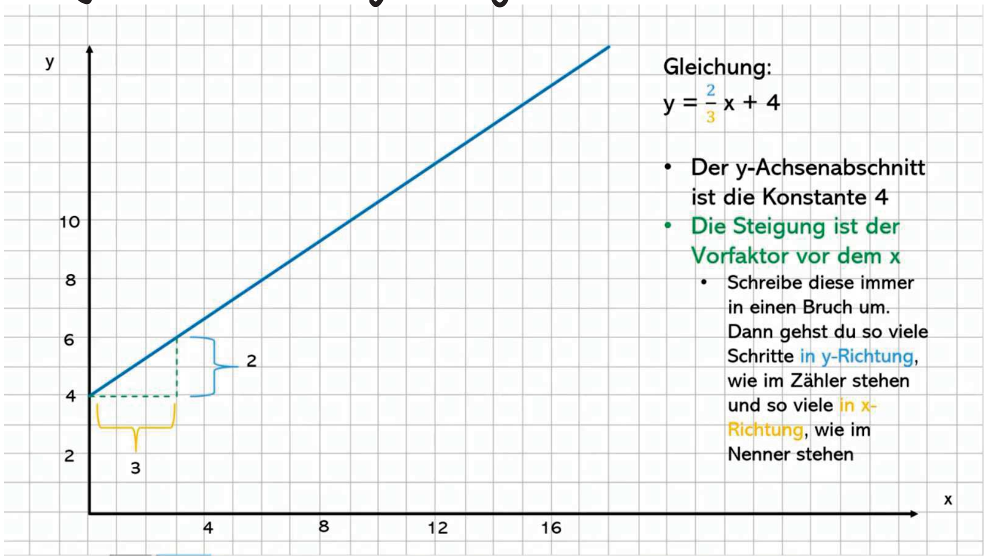
Das ist die Menge aller Werte, die f(x) annehmen kann

a) $f(x) = x^3$, $W_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^2 + 1$, $W_f = [1; \infty]$

Ganzrationale Funktionen: Lineare Funktionen

Allgemeine Funktionsgleichung: $f(x) = m \cdot x + b$



Notizen:

Aufgabe 2:

Bestimme die Funktionsgleichung wenn…

a) …die Punkte P(1 | 2) und Q(2 | 5) auf der Gerade liegen.

b) …die Funktion die Wassermenge in einem Teich im Zeitverlauf beschreibt. Zu Beginn sind in dem Teich 5 Liter und nach 5 Stunden hat sich die Wassermenge verdoppelt.

Notizen:

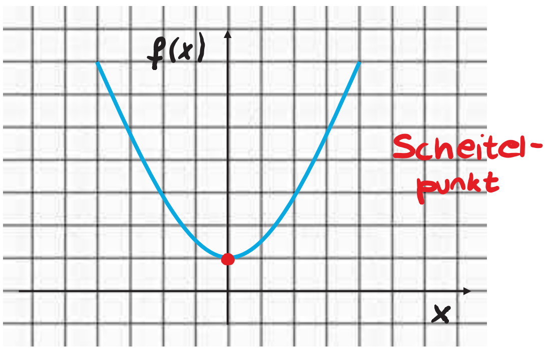
Ganzrationale Funktionen: Quadratische Funktionen

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a \cdot (x-d)^2 + e$

↓

Scheitelpunktform mit dem Scheitelpunkt (d|e).



Graphen einer solchen Form sind symmetrisch

Aufgabe 3:

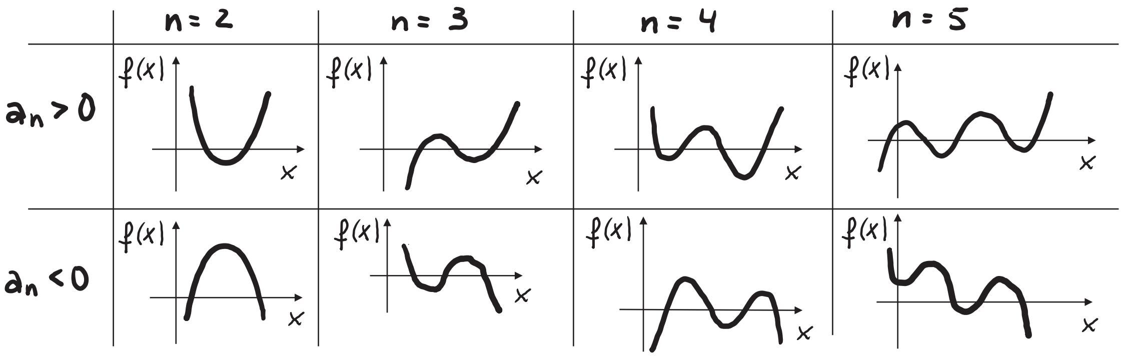
Bestimme die Funktionsgleichung wenn…

a) …die Punkte P(4|2) und Q(2|5) auf dem Graphen liegen und die y-Achse an der Stelle y=2 geschnitten wird.

b) …die Funktion mit dem Faktor -3 gestreckt wird und der Scheitelpunkt die Koordinaten (1|0,25) hat.

Notizen:

Beispielgraphen einer Funktion n-ten Gerades



Der Graph einer Funktion n-ten Gerades hat

- Höchstens n Nullstellen
- Höchstens (n-2) Wendepunkte
- Höchstens (n-1) Extrempunkte

Die Funktion f(x) = x^n

Für ein positives n gilt:

- $D_f = \mathbb{R}$
- Für $x \to \pm\infty$ existiert kein Grenzwert für $f(x)$ und damit auch keine waagerechte Asymptote

Für ein negatives n gilt:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ weil $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
  → y-Achse ist senkrechte Asymptote
- Für $x \to \pm\infty$ geht $f(x) \to 0$
  → x-Achse ist waagerechte Asymptote

Für ein gerades n gilt:

– $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$

→ Graph ist symmetrisch zur y-Achse

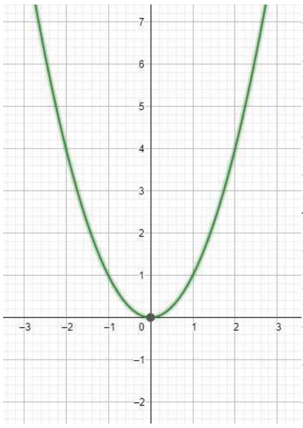
Für ein ungerades n gilt:

– $f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$

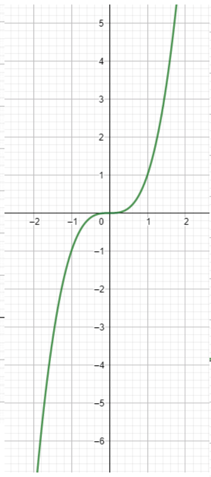
→ Graph ist symmetrisch zum Ursprung

Notizen:

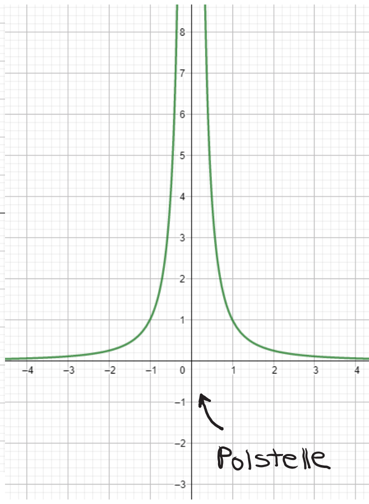
$f(x) = x^2$



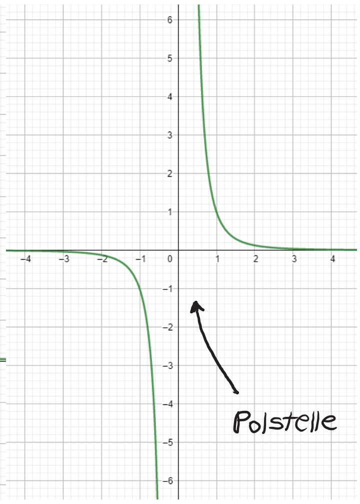
$f(x) = x^3$



$f(x) = x^{-2}$



$f(x) = x^{-3}$

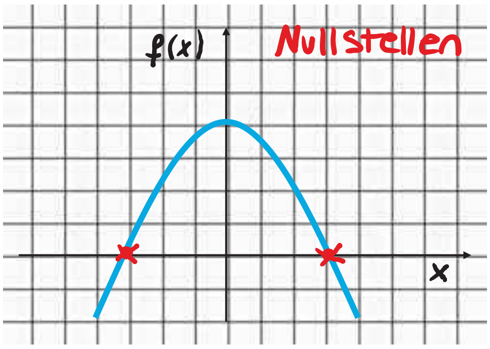


Nullstellenberechnung

Du setzt immer f(x) = 0 und willst dann nach x auflösen.

Häufig genutzte Möglichkeiten:

- Normale Äquivalenzumformung
- X ausklammern
- pq-Formel
- Substitution
- Polynomdivision



Aufgabe 4:

Wasser läuft gleichmäßig mit der Funktion f(t) = -2t + 300 aus der Badewanne ab. f(t) beschreibt dabei den Wasserstand in Litern und t die Zeit in Minuten. Wann ist die Badewanne leer?

Aufgabe 5:

Der Verlauf einer Brücke kann durch folgende Funktion beschrieben werden: f(x) = -0,02x^2 + 5x. An welchen Punkten berührt die Brücke den Boden (der Boden hat überall den Funktionswert 0)?

Aufgabe 6:

Ein Ball wird geworfen und die Flugbahn in Metern wird durch folgende Funktion beschrieben f(x) = -0,5x^2 + 2x +2. Bestimme, wann der Ball auf den Boden auftrifft (der Boden hat überall den Funktionswert 0) und wie weit der Ball geflogen ist, wenn der Werfende an der Stelle x= 1 steht und der Ball in positive x-Richtung geworfen wird.

Notizen:

Aufgabe 7:

Jule soll im Matheunterricht beantworten, wann der Graph der Funktion f(x) die x-Achse schneidet. Du probierst Jule zu helfen. Wie würdest du die Aufgabe für $f(x) = 2x^4 - 64x^2 - 288$ lösen?

Aufgabe 8:

Berechne alle Nullstellen der Funktion f(x) = x^3 - $2x^2$ - 5x + 6 durch Polynomdivision, wenn bekannt ist, dass eine Nullstelle an der Stelle x=1 liegt.

Gebrochenrationale Funktionen

Eine gebrochenrationale Funktion liegt vor, wenn f der Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen ist:

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{3x^2}{3x+5}$

Da nicht durch 0 geteilt werden darf müssen aus dem Definitionsbereich die Nullstellen des Nenners ausgeschlossen werden. Hat der Nenner keine Nullstellen sind der Definitionsbereich die Reellen Zahlen.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{3x^2}{3x+5}$$

Nullstellen des Nenners:

$$0 = 3x + 5 \quad |-5$$
$$\Leftrightarrow -5 = 3x \quad |:3$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5}{3} = x$$

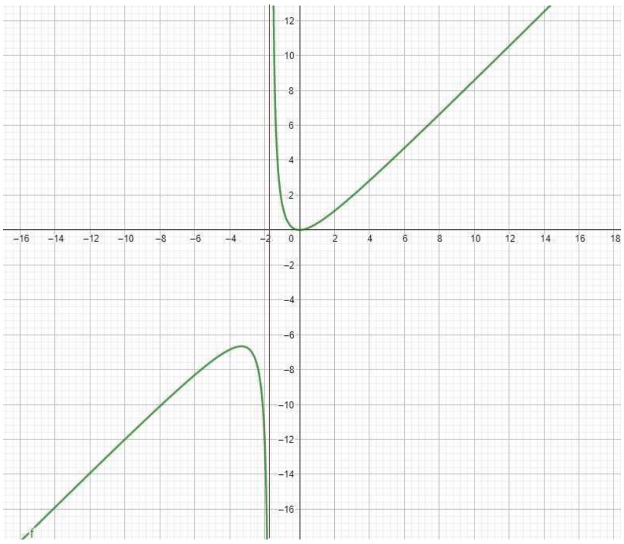
Im Normalfall muss aus dem Definitionsbereich nun also $-\frac{5}{3}$ ausgeschlossen werden und der Graph weist hier einen Pol auf. $x = -\frac{5}{3}$ ist die Gleichung der denkrechten Asymptote, die dann vorliegt.

Beispiel: $f(x) = \frac{3x^2}{3x+5}$

Asymptote bei x = - $\frac{5}{3}$

An diese Gerade wird sich der Graph beliebig nah annähern

Asymptoten können beispielsweise nur auftreten wenn der Grad des Zählers höchstens eins höher ist als der Grad des Nenners.



Ist der Grad des Nenners größer als der Grad des Zählers (oder gleich groß) kann eine waagerechte Asymptote vorliegen.

Notizen:

Exponentialfunktionen

- Variable steht im Exponenten: f(x) = a^x
- Beispiel: f(x) = 2^x
- Wenn die Basis a größer 1 ist gilt: der Definitionsbereich sind die reellen Zahlen, die Funktion ist streng monoton steigend und wenn a ≠ 0 liegt der Punkt (0|1) auf dem Graphen
- Wenn man eine Gleichung mit der Variable im Exponenten lösen will nutzt man in der Regel den Logarithmus
- Wenn du den Logarithmus anwendest denk immer daran, beide Seiten der Gleichung zu logarithmieren.

Beachte immer, dass jede Gleichung näherungsweise mit dem GTR gelöst werden kann

Logarithmusgesetze:

$$\log_b (P \cdot Q) = \log_b P + \log_b Q$$

Beispiel: $\log_5 (4 \cdot 8) = \log_5 4 + \log_5 8$

$$\log_b (P : Q) = \log_b P - \log_b Q$$

Beispiel: $\log_6 (\frac{2}{3}) = \log_6 2 - \log_6 3$

$$\log_b P^n = n \cdot \log_b P$$

Beispiel: $\log_2 3^4 = 4 \cdot \log_2 3$

Potenzgesetze:

Bei gleicher Basis:

$x^a \cdot x^b = x^{a+b} \rightarrow$ Beispiel: $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$

$x^a : x^b = x^{a-b} \rightarrow$ Beispiel: $x^2 : x^3 = x^{2-3} = x^{-1}$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

Beispiel: $(x^2)^4 = x^{2 \cdot 4} = x^8$

Bei unterschiedlicher Basis & gleichem Exponenten:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \rightarrow$ Beispiel: $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$

$a^n : b^n = (a : b)^n \rightarrow$ Beispiel: $6^3 : 3^3 = (6 : 3)^3 = 2^3$

Sonderfälle:

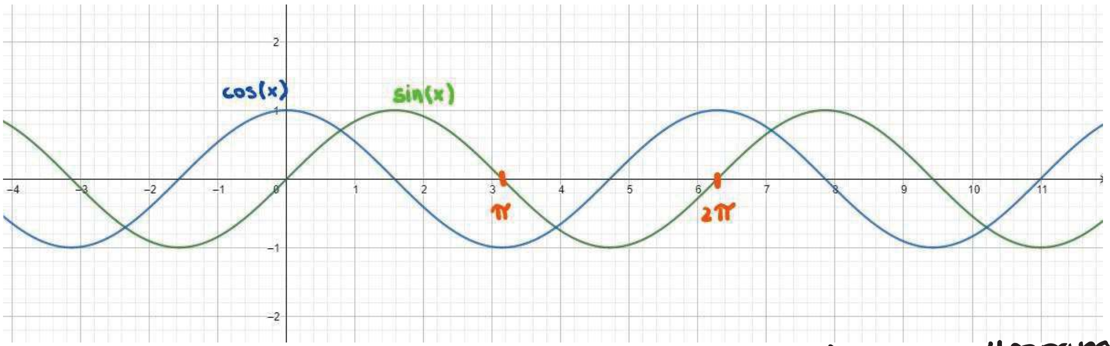
$x^0 = 1$

$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \rightarrow$ Beispiel: $-2x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \rightarrow$ Beispiel: $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1} = x^{1/2}$

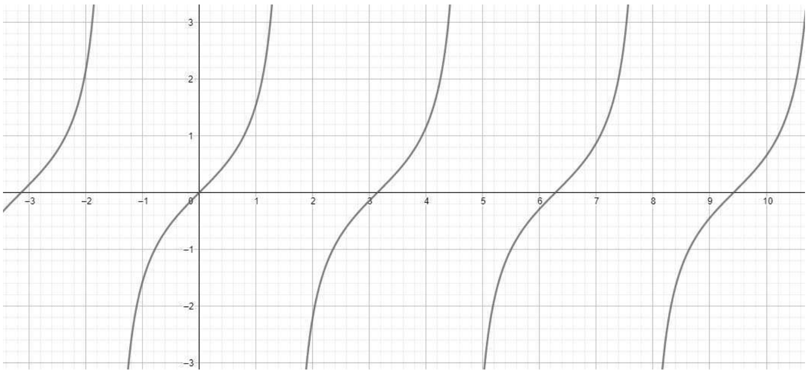
Trigonometrische Funktionen

Die Graphen der Funktionen f(x) = sin(x) und g(x) = cos(x) solltest du zeichnen können:



- Der Graph von sin(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung
- Der Graph von cos(x) ist achsensymmetrisch zur y-Achse

Den Graphen der Funktion h(x) = tan(x) solltest du zeichnen können:



Allgemein gilt:

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Symmetrie

• Achsensymmetrie zur y-Achse:

Liegt vor, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

Der Graph ist auf jeden Fall achsensymmetrisch, wenn alle Exponenten der Variable in einer ganzrationalen Funktion gerade Zahlen sind.

• Punktsymmetrisch zum Ursprung:

Liegt vor, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

Der Graph ist auf jeden Fall punktsymmetrisch, wenn alle Exponenten der Variable in einer ganzrationalen Funktion ungerade Zahlen sind.

[Null gilt als gerade Zahl. Weist der Funktionsterm eine Konstante auf, kann diese mit x^0 multipliziert werden und damit kann der Graph nicht mehr punktsymmetrisch zum Ursprung sein.]

Rechnerisch überprüft man die Bedingungen, indem man in den Funktionsterm –x statt x einsetzt und den Term vereinfacht.

Aufgabe 9:

Überprüfe rechnerisch, ob folgende Funktionen eine Symmetrie aufweisen und falls ja, welche:

a) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 10$

b) $f(x) = -x^3 + 5x$

Notizen:

Lesson 02

Lineare Gleichungssysteme lösen

Hast du ein Gleichungssystem mit mehreren Variablen und mehreren Gleichungen gibt es verschiedene Möglichkeiten, dieses zu lösen:

- Einsetzungsverfahren

$$\text{I}: \quad 5 = 2x_1 - x_2$$
$$\text{II}: \quad 0 = 3x_1 + 1{,}5x_2$$

Löse eine der Gleichungen nach einer Variablen auf:

$$\text{I}: \quad 5 = 2x_1 - x_2 \quad | + x_2$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 2x_1 - 5$$

Jetzt kannst du die Gleichung für x_2 in die Gleichung einsetzen, die du noch nicht genutzt hast.

In II einsetzen:

$$0 = 3x_1 + 1{,}5 \cdot (2x_1 - 5)$$

Nach x_1 auflösen:

$$0 = 3x_1 + 3x_1 - 7{,}5$$
$$\Leftrightarrow 0 = 6x_1 - 7{,}5 \quad | + 7{,}5$$
$$\Leftrightarrow 7{,}5 = 6x_1 \quad | : 6$$
$$\boxed{x_1 = 1{,}25}$$

Jetzt kannst du den Wert für x_1 in die Gleichung einsetzen, die schon nach x_2 aufgelöst ist.

$$x_2 = 2x_1 - 5$$
$$x_2 = 2 \cdot (1{,}25) - 5$$
$$= 2{,}5 - 5$$
$$\boxed{= -2{,}5}$$

Notizen:

• Additionsverfahren

$$\text{I}: \; 2x + 3y = 15$$
$$\text{II}: \; x + y = 5$$

Du kannst entscheiden, welche Variable du in welcher Gleichung eliminieren willst. Wir entscheiden uns hier für x. Dann musst du gucken, wie du die Zeilen verrechnen kannst, dass x wegfällt.

Aufgabe 10:

Löse das LGS mit dem Additionsverfahren. Du kannst zum Beispiel die erste Gleichung minus zwei mal die zweite Gleichung rechnen:

$$\text{I} - 2 \cdot \text{II}$$

Notizen:

Lineare Gleichungssysteme lösen

• Gaußverfahren

Du bringst das Gleichungssystem durch Umformungen in die Stufenform. Dann löst du die Gleichungen der Reihe nach von unten nach oben. Das Gleichungssystem kann

• genau eine Lösung
• keine Lösung (z.B. 0=3)
• oder unendlich viele Lösungen haben (z.B. 0=0)

Gibt es unendlich viele Lösungen kannst du diese in Abhängigkeit von einem Parameter ausrechnen.

Löse folgendes Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{I}: & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 27 \\ \mathrm{II}: & \quad\;\; - x_2 + 2x_3 = -7 \\ \mathrm{III}: & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \end{array}$$

Stufenform

Hier soll überall 0 stehen, beziehungsweise gar nichts
Also sind die oberen Gleichungen I und II schon fertig.

Notizen:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 27 \quad (\mathrm{I}) \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & -7 \quad (\mathrm{II}) \\ \underline{2x_1} & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 16 \quad (\mathrm{III}) \end{array}$$

---

eliminieren:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 27 \quad (\mathrm{I}) \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & -7 \quad (\mathrm{II}) \\ & & \underline{x_2} & - & 4x_3 & = & 11 \quad (\mathrm{IV}) = (\mathrm{I}) - (\mathrm{III}) \end{array}$$

---

eliminieren:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 27 \quad (\mathrm{I}) \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & -7 \quad (\mathrm{II}) \\ & & & & -2x_3 & = & 4 \quad (\mathrm{V}) = (\mathrm{II}) + (\mathrm{IV}) \end{array}$$

Gleichungssystem von unten nach oben lösen:

$\mathrm{V}: \quad -2x_3 = 4 \quad |:-2 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = -2$

$\mathrm{II}: \quad -x_2 + 2\cdot(-2) = -7 \quad |+x_2 \quad |+7$

$\Leftrightarrow \quad 3 = x_2$

$\mathrm{I}: \quad 2x_1 + 3\cdot 3 - (-2) = 27$

$\Leftrightarrow \quad 2x_1 + 11 = 27 \quad |-11$

$\Leftrightarrow \quad 2x_1 = 16$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 8$

Lösung: $x_1 = 8, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -2$

Aufgabe 11: Löse folgendes Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \quad (\mathrm{I})$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \quad (\mathrm{II})$$
$$-x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 = -2 \quad (\mathrm{III})$$

Notizen:

Aufgabe 12: Löse folgendes Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \quad (\mathrm{I})$$
$$2x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 12 \quad (\mathrm{II})$$
$$x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 3 \quad (\mathrm{III})$$

Lesson 03

Die Ableitung

• <u>Sekante:</u>

Die Steigung einer Sekante im Intervall [x; x_0] der Funktion f entspricht der Änderungsrate in diesem Intervall.

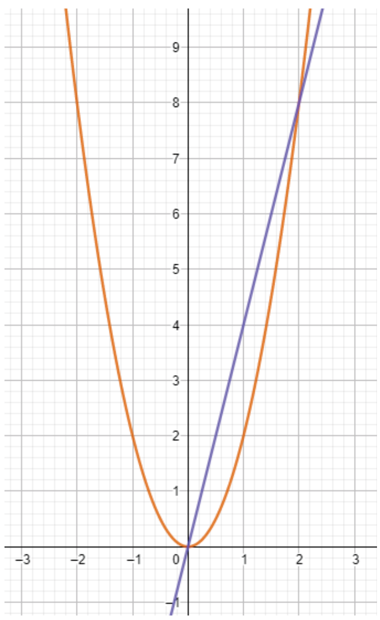
Änderungsrate:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Aufgabe 13:

Aufgabe: Eine Schlucht kann annähernd durch die Funktion f(x) = $2x^2$ beschrieben werden. Bestimme die Änderungsrate im Intervall [0;2] und interpretiere das Ergebnis im Sachkontext (Werte in Metern).

<u>Die Sekante:</u>



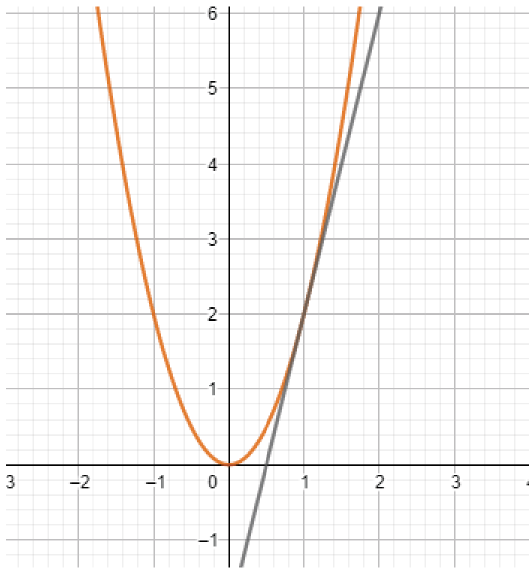
Grafisch ist die Sekante also eine Gerade, die durch zwei Punkte auf der vorliegenden Funktion verläuft.

Im vorliegenden Fall sollte also eine Gerade betrachtet werden, die durch die Punkte A(0|0) und B(2|8) verläuft.

Tangente:

Eine Tangente liegt also an einem Punkt des Graphen und hat genau die selbe Steigung wie die Steigung des Graphen f in diesem Punkt. Diese Steigung berechnest du mit der Ableitung.

In diesem Beispiel soll die Tangente durch den Punkt P (1 | 2) laufen und hat damit auch die Steigung, die in dem Punkt P vorliegt.



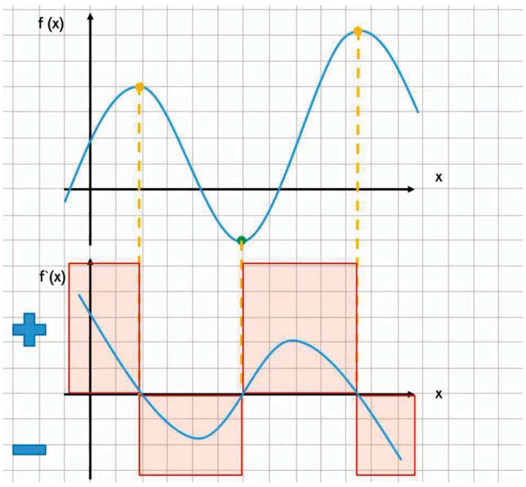
Mit der Ableitung berechnest du also die Steigung der Funktion in jedem einzelnen Punkt!!!

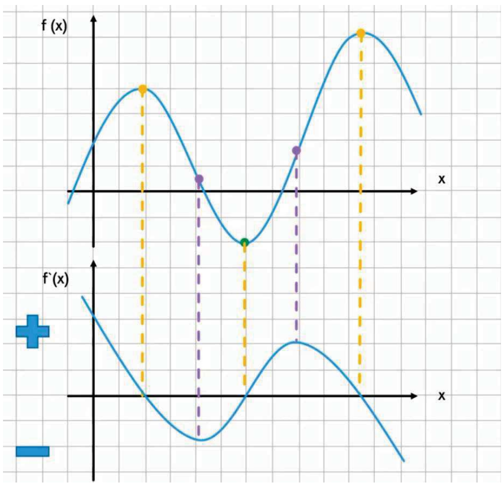
Kennst du den Graphen der Ableitung f'(x), kannst du bestimmte Eigenschaften für f(x) bereits herleiten.

- Sind die Funktionswerte von f'(x) positiv, ist f(x) streng monoton steigend
- Sind die Funktionswerte von f'(x) negativ, ist f streng monoton fallend.
- Sind die Funktionswerte von f''(x) positiv, ist f' streng monoton steigend und der Graph von f(x) hat eine Linkskurve.
- Sind die Funktionswerte von f''(x) negativ, ist f' streng monoton fallend und der Graph von f(x) hat eine Rechtskurve.

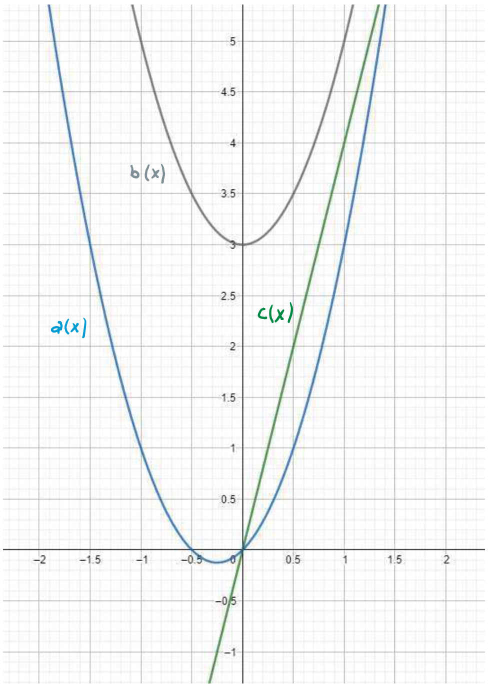
- Hat f einen Extrempunkt, hat f'(x) für den selben x-Wert eine Nullstelle
- Hat f einen Wendepunkt, hat f'(x) für den selben x-Wert eine Extremstelle und f''(x) für den selben x-Wert eine Nullstelle

Die Ableitung zeichnen



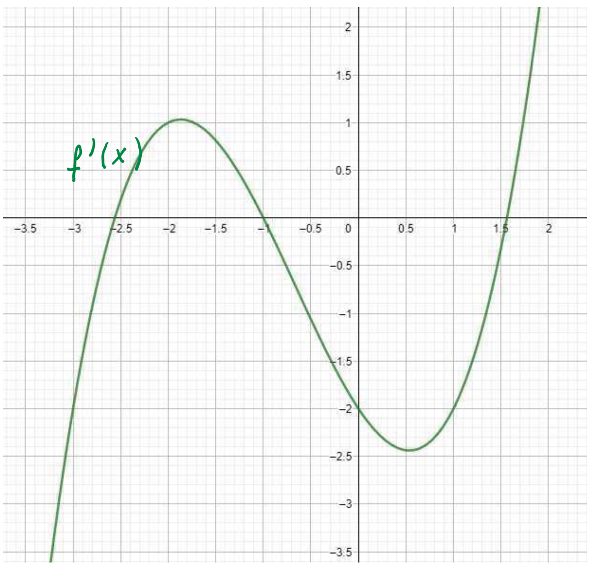


Notizen:



Aufgabe 14:

Welcher Graph könnte hier ein Ableitungsgraph sein und welcher Graph gehört zur entsprechenden Ausgangsfunktion



Aufgabe 15:

Welche Aussage ist wahr, welche ist falsch?

- ○ An der Stelle x = -1 hat f(x) einen Extrempunkt
- ○ An der Stelle x=0 hat f(x) einen Hochpunkt
- ○ Die Steigung von f an der Stelle x=1 ist negativ

Lesson 04

Ableitungsregeln

• POTENZREGEL + FAKTORREGEL:

$f(x) = a\,x^n \rightarrow f(x) = n \cdot a\,x^{n-1}$

Beispiel: $f(x) = 5x^3 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 5x^2 = 15x^2$

• SUMMENREGEL:

$f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Beispiel: $f(x) = 3x^2 + 2x \rightarrow f'(x) = 6x + 2$

• KONSTANTEN:

$f(x) = u(x) + c \rightarrow f'(x) = u'(x)$

Beispiel: $f(x) = x^2 + 5 \rightarrow f'(x) = 2x$

• MERKZETTEL:

$f(x)$	c	x	$\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} = x^{1/2}$
$f'(x)$	0	1	$-1 \cdot x^{-2}$	$-2x^{-3}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$

Aufgabe 16:

a) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 0{,}5x + 1$

b) $f(x) = 3$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + x^{-1}$

d) $f(x) = \sqrt{x} + x^2$

e) $f(x) = \frac{2}{x} + x^3 - 0{,}5x^2$

Notizen:

Mathematische Ableitungsregeln

• PRODUKTREGEL

$$f(x) = u(x)\cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x)$$

$$f(x) = u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$$

$$\rightarrow f'(x) = u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = 3x\cdot \ln(x)$$

$$u(x) = 3x \rightarrow u'(x) = 3,\quad v(x) = \ln(x) \rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3\cdot \ln(x) + 3x\cdot \frac{1}{x} = 3\cdot \ln(x) + 3$$

• QUOTIENTENREGEL

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) \overbrace{- v'(x)\cdot u(x)}^{\text{Minusklammer beachten!}}}{(v(x))^2}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{4x}{x^2-5}$

$$u(x) = 4x \rightarrow u'(x) = 4,\quad v(x) = x^2-5 \rightarrow v'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{4\cdot(x^2-5) - [2x\cdot 4x]}{(x^2-5)^2} = \frac{4x^2-20-8x^2}{(x^2-5)^2} = \frac{-20-4x^2}{(x^2-5)^2}$$

- KETTENREGEL

$f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Beispiel: $f(x) = -2(3x^2 + x - 5)^2$

Äußere Funktion: $u(x) = -2x^2 \rightarrow u'(x) = -4x$

Innere Funktion: $v(x) = 3x^2 + x - 5 \rightarrow v'(x) = 6x + 1$

$f'(x) = -4(3x^2 + x - 5) \cdot (6x + 1)$

Aufgabe 17:

Bilde die erste Ableitung:

$f(x) = x^3 \cdot (5 - 2x^2)^2$

Notizen:

Lesson 05

Funktionseigenschaften untersuchen

Tangentengleichungen

Soll man die Gleichung der Tangente in einem bestimmten Punkt P (x_0 | y_0) bestimmen muss man Folgendes beachten:

- Eine Tangente ist eine lineare Funktion: $y = m \cdot x + b$

- m ist die Steigung in dem Punkt, also: $m = f'(x_0)$

Alternativ, wenn du 2 Punkte kennst: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- Der Punkt P liegt auf dem Graphen und auf der Tangente. Du kannst ihn also in die Gleichung einsetzen, um b auszurechnen.

Aufgabe 18:

Bestimmte die Gleichung der Tangente, die durch den Punkt P (1 | f(1)) in der Funktion $f(x) = 3x^2 + 2$ verläuft

Berührung und Schnittpunkt zweier Graphen

Um den Schnittpunkt zweier Graphen zu bestimmen, musst du die Funktionsgleichungen gleichsetzen: $f(x) = g(x)$

Verlaufen beide Graphen durch den selben Punkt gilt Folgendes:

- Haben sie eine gemeinsame Tangente bzw. die selbe Steigung, sodass gilt: $f'(x_0) = g'(x_0)$ Dann berühren die Graphen sich.

- Haben die Graphen in dem Punkt keine gemeinsame Tangente und damit nicht die selbe Steigung, so schneiden sich die Graphen und berühren sich nicht.

Aufgabe 19:

Gegeben sind folgende Funktionen:

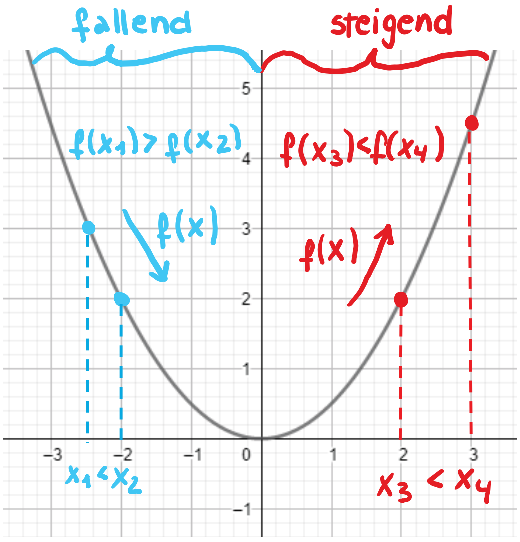
$$f(x) = 2x^2 - x$$

$$g_a(x) = x^3 - ax \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

Bestimme die Werte für a so, dass sich die Graphen von f und g_a berühren.
Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte.

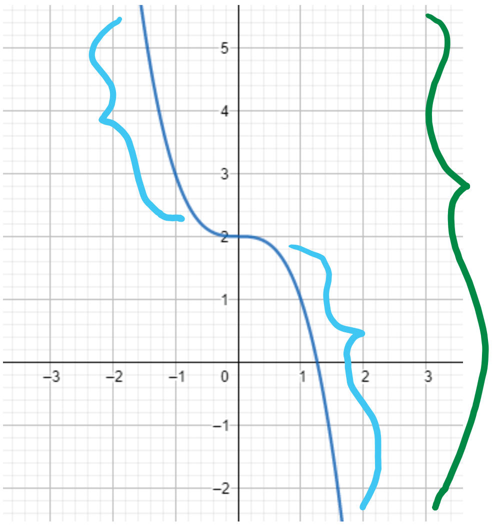
Notizen:

Monotonie



Im blau gekennzeichneten Bereich ist f(x) streng monoton fallend

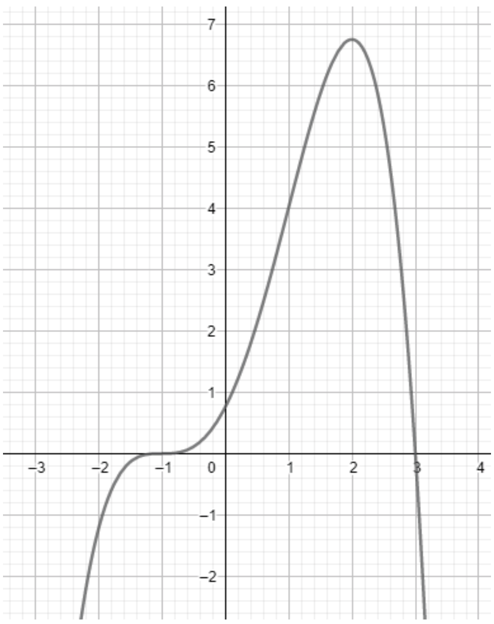
Im rot gekennzeichneten Bereich ist f(x) streng monoton steigend



Im blau gekennzeichneten Bereich ist f(x) streng monoton fallend

Im grün gekennzeichneten Bereich ist f(x) monoton fallend

→ für x=0 hat der Graph eine Steigung von 0



Aufgabe 20:

In welchem Intervall zeigt dieser Graph welches Monotonieverhalten?

Monotonie

MATHEMATISCH GILT:

- Wenn in einem Intervall für alle x gilt:

  $f'(x) > 0$ → dann ist f in dem Intervall streng monoton steigend.

- Wenn in einem Intervall für alle x gilt:

  $f'(x) < 0$ → dann ist f in dem Intervall streng monoton fallend.

Vorgehen bei der Bestimmung des Monotonieverhalten:

1. Bestimme $f'(x)$.
2. Bestimme die Nullstellen von $f'(x)$.
   → An den Stellen kann f(x) das Vorzeichen wechseln
   → Zwischen den Nullstellen sind die Intervalle, die wir betrachten
3. Wähle aus jedem Intervall beliebig eine Stelle x_0 aus und bestimme $f'(x_0)$.
   Wenn $f'(x_0) > 0$ → f ist in dem Intervall steigend
   Wenn $f'(x_0) < 0$ → f ist in dem Intervall fallend

Aufgabe 21:

Bestimme das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$ in den einzelnen Intervallen.

Verhalten für x → ± ∞ bei

Betrachte die Variable mit dem höchsten Exponenten:

$f(x) = a_n x^n + \dots$

- Wenn… n gerade & $a_n > 0$ dann gilt… $f(x) \to +\infty$ für $x \to \pm\infty$
- Wenn… n gerade & $a_n < 0$ dann gilt… $f(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$
- Wenn… n ungerade & $a_n > 0$ dann gilt… $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$
- Wenn… n ungerade & $a_n < 0$ dann gilt… $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$

Extrempunkte

Ein Extrempunkt liegt vor, wenn für einen bestimmten x-Wert Folgendes gilt:

Notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0$

Hinreichendes Kriterium: $f''(x) \neq 0$

Notizen:

Gehe so vor:

1. Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$.
2. Bestimme alle x-Werte für $f'(x) = 0$.
3. Setze diese x-Werte in $f''(x)$ ein.
   ↳ $f''(x_0) > 0 \to$ Tiefpunkt / Minimum
   ↳ $f''(x_0) < 0 \to$ Hochpunkt / Maximum
   ↳ $f''(x_0) = 0 \to$ Kein Extrempunkt
4. Bestimme für die x-Werte, für die ein Extrempunkt vorliegt, $f(x_0)$.

Aufgabe 22:

Ein Ball wird in die Luft geworfen. Die Funktion $f(x) = -0.25\,x^4 + 1.5\,x^2 + 0.75$ beschreibt die Höhe des Balls in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Sekunden. Bestimme, zu welchem Zeitpunkt der Ball am höchsten ist und wie hoch er zu diesem Zeitpunkt ist.

Notizen:

Wendepunkte

Ein Wendepunkt liegt vor, wenn für einen bestimmten x-Wert Folgendes gilt:

Notwendiges Kriterium: $f''(x) = 0$

Hinreichendes Kriterium: $f'''(x) \neq 0$

Notizen:

Wendepunkte

Gehe so vor:

1. Bestimme $f''(x)$ und $f'''(x)$.
2. Bestimme alle x-Werte für $f''(x) = 0$.
3. Setze diese x-Werte in $f'''(x)$ ein.
   ↳ $f'''(x_0) \neq 0$ → Wendepunkt
   ↳ $f'''(x_0) = 0$ → Kein Wendepunkt
4. Bestimme für die x-Werte, für die ein Wendepunkt vorliegt, $f(x_0)$.

Aufgabe 23:

Die Strecke, die ein Auto in einer bestimmten Zeit zurücklegt, wird durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + 40$ beschrieben. Bestimme, wann die Geschwindigkeit des Autos am größten ist und welche Strecke das Auto zu diesem Zeitpunkt zurückgelegt hat.

Notizen:

Lesson 06

Die e-Funktion

Die Basis der e-Funktion ist Eulersche Zahl e ≈ 2,7183
Für f(x) = e^x gilt:

Die e-Funktion ist eine besondere Funktion, da sie mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Die Steigung entspricht also in jedem Punkt dem Funktionswert.

Für f(x) = e^x gilt:

- $D_f = \mathbb{R}$
- Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$
- Für $x \to -\infty$ läuft f(x) näherungsweise gegen den Grenzwert 0.
  → die x-Achse ist eine waagerechte Asymptote
- Die Funktion ist streng monoton steigend

Soll eine Gleichung mit einer Exponentialfunktion nach x aufgelöst werden verwendest du den natürlichen Logarithmus.

Beispiel: $2 = 0{,}5e^{2+x} \quad | :0{,}5$

$\Leftrightarrow \quad 4 = e^{2+x} \quad | \ln(\ldots)$

$\Leftrightarrow \quad \ln(4) = (2+x) \cdot \ln(e) \quad | \ln(e) = 1$

$\Leftrightarrow \quad \ln(4) = 2+x$

$\Leftrightarrow \quad \ln(4) - 2 = x \approx -0{,}61$

$\boxed{\begin{array}{l} \ln(e) \text{ und } e^{\ln(\ldots)} \\ \text{kürzen sich weg!} \\ \to \ln(e^x) = x \\ \to e^{\ln(2x)} = 2x \end{array}}$

Logarithmengesetze für x>0 und y>0:

$\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$

$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Für die Ableitung von verschiedenen Funktionen, deren Bestandteil eine e-Funktion ist, gilt:

$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = a \cdot e^x \rightarrow f'(x) = a \cdot e^x$

$f(x) = a \cdot e^{b \cdot x + c} \rightarrow$ Kettenregel mit $u(x) = a \cdot e^x$ und $v(x) = b \cdot x + c$

Beispiel:

$f(x) = 3e^{2x+1} \rightarrow u(x) = 3e^x$, $u'(x) = 3e^x$

$\rightarrow v(x) = 2x + 1$, $v'(x) = 2$

$f'(x) = 3 \cdot e^{2x+1} \cdot 2 = 6e^{2x+1}$

Aufgabe 24:

Bestimme mögliche Extrem- und Wendepunkte der Funktion

f(x) = (2x-5) e^{2x+3} .

Notizen:

Notizen:

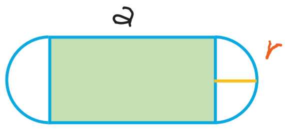
Extremwertproblem

WIE DU VORGEHST:

1. Zielfunktion für das bestimmen, für das die Extremstelle berechnet werden soll
2. Wenn die Zielfunktion mehrere Variablen enthält muss man diese durch Nebenbedingungen eliminieren: Nebenbedingung aufstellen & einsetzen
3. Extremstellen der Zielfunktion durch f'(x) und f''(x) bestimmen
4. Randwerte untersuchen: Bei der normalen Vorgehensweise zur Bestimmung von Extremstellen wird der Rand des Definitionsbereiches nicht berücksichtigt. Man betrachtet also zusätzlich das Verhalten von f(x) an den Rändern und vergleicht die Werte mit den gefundenen Extremwerten

Aufgabe 25:

Die Laufbahn eines kleinen Stadions begrenzt einen Sportplatz. Sie besteht insgesamt aus 500 m Laufstrecke, die sich aus zwei gradlinigen Strecken der Länge a und zwei halbkreisförmigen Strecken zusammensetzt. Der Halbkreis hat den Radius r. Wie groß sollten a und r gewählt werden, damit der Sportplatz (im Bild grün gefärbt) seine maximale Fläche annimmt?



Notizen:

Notizen:

Funktionsgleichung bestimmen

- Eine Funktion welchen Gerades sollst du bestimmen? Dadurch weißt du, wie die allgemeine Funktionsgleichung in Variablen aussieht:

Funktion 1. Grades	$f(x)=ax+b$
Funktion 2. Grades	$f(x)=ax^2+bx+c$
Funktion 3. Grades	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
Funktion 4. Grades	$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
Funktion 5. Grades	$f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$

- Welche Eigenschaften sind gegeben, die die Funktion haben sollte?
- Diese Eigenschaften schreibst du um in mathematische Bedingungen

- Stelle mit diesen Bedingungen ein lineares Gleichungssystem auf
- Löse das LGS
- Stelle mit der Lösung die Funktionsgleichung auf

Häufig gegebene Eigenschaften	Daraus folgende mathematische Bedingung
Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt P (x_0 I y_0)	$f(x_0) = y_0$
An einer Stelle x_0 hat der Graph die Steigung m	$f'(x_0) = m$
Die Funktion besitzt einen Extrempunkt E (x_E I y_E)	$f(x_E) = y_E \quad \wedge \quad f'(x_E) = 0$
Die Funktion besitzt einen Wendepunkt W (x_W I y_W)	$f(x_W) = y_W \quad \wedge \quad f'(x_W) = 0$
Die Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse	Nur gerade Exponenten
Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung	Nur ungerade Exponenten

Aufgabe 26:

Bestimme die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion f dritten Gerades, die durch den Punkt P(0|-2) verläuft. An der Stelle 1 hat die Funktion einen Hochpunkt und an der Stelle 2 hat die Wendetangente eine Steigung von -1,5.

Funktionsscharen

- Eine Funktionsschar liegt vor, wenn die Funktion einen Parameter enthält
- Du berechnest alles genau so, wie wenn du eine Funktion ohne Parameter gegeben hast und behandelst den Parameter als Konstante
- Häufig wird das Ergebnis in Abhängigkeit vom Parameter angegeben
- Wenn die Werte, die der Parameter annehmen kann, eingeschränkt sind, musst du das bei allen Rechnungen beachten!
- Beispielsweise $f_t(x) = 2x^2 + 3tx$ für $t > 0$

Funktionsscharen

Bestimme mögliche Extrempunkte dieser Funktion:

$f_t(x) = 2x^2 + 3tx$ für $t > 0$

$f'_t(x) = 4x + 3t$

$f''_t(x) = 4$

$f'_t(x) = 0$

$0 = 4x + 3t$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}t$

$f''_t(x) > 0 \rightarrow$ Für $x = -\frac{3}{4}t$ liegt ein Tiefpunkt vor.

Wachstum

Exponentielles Wachstum:

$f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ mit $k > 0$

Beispiel: Bakterienwachstum f(x) in Abhängigkeit von der Zeit x

Exponentieller Zerfall:

$f(x) = a \cdot e^{-k \cdot x}$ mit $k > 0$

Beispiel: Radioaktiver Zerfall oder Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit

$\rightarrow$ a ist der Anfangsbestand zum Zeitpunkt $x = 0$

$\rightarrow$ k ist die Wachstums- bzw. Zerfallskonstante

Wachstum

Eine Flüssigkeit wird aus dem Kühlschrank genommen und die Temperatur steigt mit folgender Funktion:

$T(t) = 30 - 17e^{-0,1t}$

Dabei beschreibt t die vergangene Zeit in Minuten und T(t) die Temperatur in Grad Celsius.

Welche Temperatur wird die Flüssigkeit nach längerer zeit (nach der Erwärmung aufweisen?

Für $t \rightarrow \infty$ läuft $-17e^{-0,1t}$ gegen 0.

Für $t \rightarrow \infty$ läuf $T(t)$ deshalb gegen 30.

Nach Erwärmung hat die Flüssigkeit eine Temperatur von 30°C.

Integralrechnung

Lesson 07
Stammfunktionen

Integrieren

- Integrieren ist quasi rückwärts ableiten

$$
\begin{tikzcd}
F(x) \text{ – Stammfunktion} \arrow[d, bend left, "\text{Ableiten}"] \\
f(x) \text{ – Ausgangsfunktion} \arrow[u, bend left, "\text{Integrieren}"] \arrow[d, bend left, "\text{Ableiten}"] \\
f'(x) \text{ – Ableitung} \arrow[u, bend left, "\text{Integrieren}"]
\end{tikzcd}
$$

- Wenn wir die Ableitung f'(x) berechnen ist f(x) somit die entsprechende Stammfunktion
- Zwei Stammfunktionen der selben Ausgangsfunktion können sich um eine Konstante unterscheiden.

- Integrieren tust du für jedes „Päckchen“ einzeln
- Es gilt:

$$f(x) = ax^b$$

$$F(x) = \frac{a}{b+1}\,x^{b+1}$$

→ Gilt allerdings nicht für $b = -1$

Für $f(x) = x^{-1}$ gilt $F(x) = \ln(x)$ $\quad (x \neq 0)$

- Tipp: Genau wie beim Ableiten sollte man Brüche und Wurzeln erst umschreiben:

$$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} \rightarrow F(x) = \frac{2}{-3+1}\,x^{-3+1} = -x^{-2}$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{1/2} \rightarrow F(x) = \frac{2}{0{,}5+1}\,x^{0{,}5+1} = \frac{4}{3}\,x^{1{,}5}$$

- Für die allgemeine Stammfunktion addierst du außerdem die additive Konstante c
- Je nach Aufgabenstellung kann diese als Wert gegeben sein

Beispiel: $f(x) = x^2$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

Beispiel 2: $f(x) = 4e^x$ mit $F(0) = 2$

$F(x) = 4e^x + c$

$F(0) = 4e^0 + c = 4 + c = 2 \quad | -4$

$\Leftrightarrow \quad c = -2 \quad \rightarrow F(x) = 4e^x - 2$

Notizen:

Lesson 08
Unbestimmtes / bestimmtes Integral

Das unbestimmte Integral

- Das unbestimmte Integral ergibt sich aus der Menge aller Stammfunktionen:
- Die selben Funktionen mit verschiedenen Konstanten können alle die Stammfunktion von f(x) sein. Eine Funktion hat also unendlich viele Stammfunktionen. Das verdeutlicht die Integrationskonstante C

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Das bestimmte Integral

- Das bestimmte Integral ist ein unbestimmtes Integral mit Integrationsgrenzen
- Zur Berechnung des bestimmten Integrals nutzt du den Hauptsatz
- Hier ist die additive Konstante irrelevant

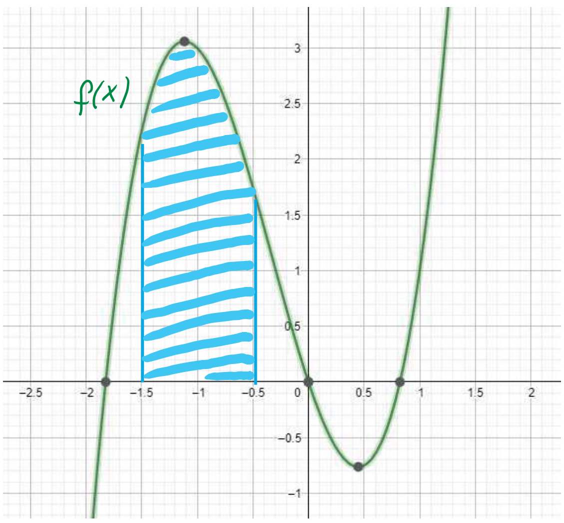
Hauptsatz:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

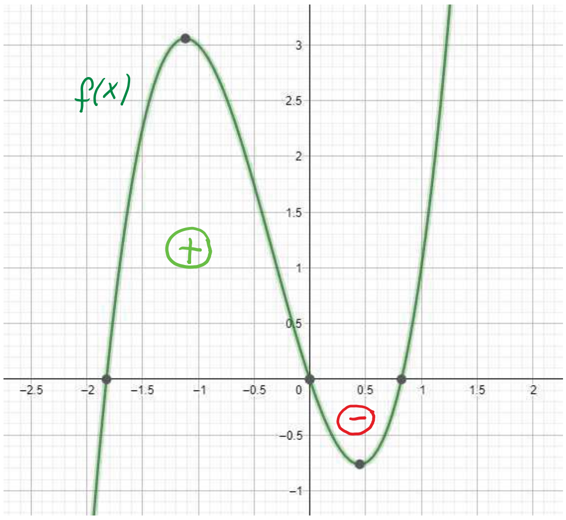
- Grafisch gesehen ist das Integral die Fläche unter dem Graphen
- Das Integral des Graphen f(x) von -1,5 bis -0,5 ist hier eingezeichnet:

$$\int_{-1,5}^{-0,5} f(x)\,dx$$

- Interpretieren kannst du das Integral je nach Sachkontext. Beispiele:
  - Der Graph beschreibt, wie viel Wasser in eine Badewanne fließt. Das Integral ist die Wassermenge, die zufließt.
  - Der Graph beschreibt die Geschwindigkeit eines Autos. Das Integral beschreibt die gefahrene Strecke



Flächen oberhalb der x-Achse werden positiv in das Integral gerechnet und Flächen unterhalb der x-Achse werden negativ in das Integral gerechnet.



Das Integral von -1,5 bis 0,5 ist damit kleiner als das Integral von -1,5 bis 0

Flächeninhalte sind immer positiv, ein Integral kann positiv oder negativ sein!

Notizen:

Lesson 09

Integrationsregeln

Potenzregel:

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Faktorregel:

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx$$

Summenregel:

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Differenzregel:

$$\int (f(x) - g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$$

Notizen:

Lesson 10

Flächeninhalte im Koordinatensystem

Flächenberechnung

Mithilfe der Integralrechnung kann man also Flächen berechnen.

Jedoch können Flächen nicht negativ sein. Flächen unterhalb der x-Achse sollen nicht abgezogen sondern ebenfalls aufaddiert werden.

Um die Fläche unter einem Graphen im Intervall a bis b zu berechnen geht man so vor:

1. Nullstellen in dem Intervall berechnen
2. Integral zwischen den äußeren Grenzen und den Nullstellen einzeln berechnen
3. Beträge der Ergebnisse addieren

Wichtig ist also:

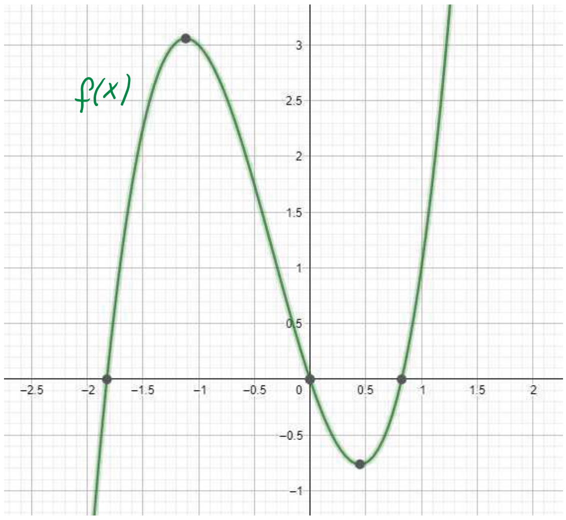
- Wenn du das Integral zwischen zwei Grenzen berechnen sollst kannst du dies direkt ausrechnen
- Wenn du den Flächeninhalt zwischen zwei Grenzen berechnen sollst musst du erst die Nullstellen bestimmen, dann die Integrale einzeln berechnen und auf die Vorzeichen achten!

Notizen:

Aufgabe 27:

Berechne sowohl das Integral, als auch den Flächeninhalt zwischen der Funktion f(x) und der x-Achse im Intervall [-1,5; 0,5].

$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x$



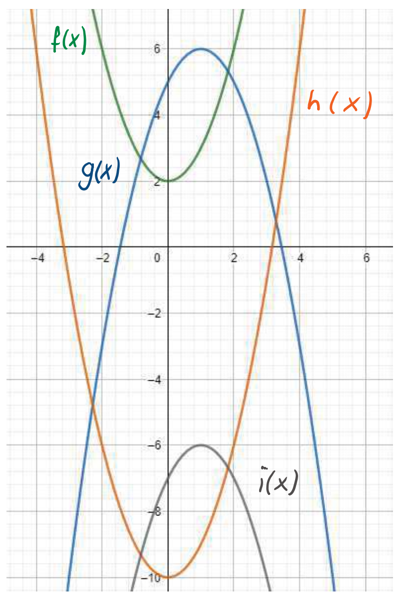
Notizen:

Flächenberechnung

Fläche zwischen zwei Graphen:

$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

→ Wenn du diese Gleichung nutzt ist egal, welche der Funktionen oben und welche unten verläuft und es ist egal, ob die Graphen oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen.

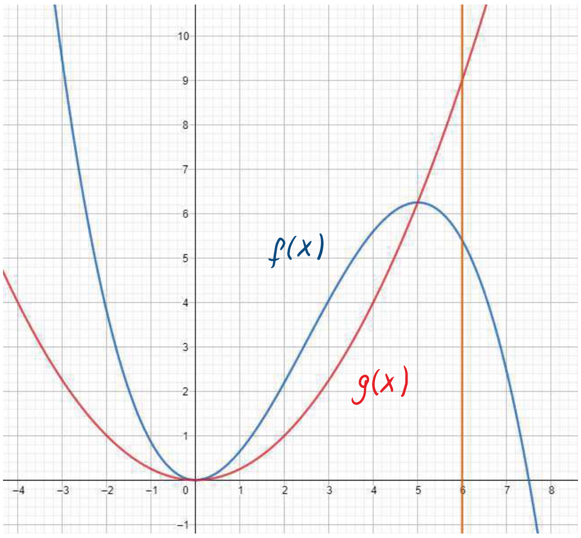


Aufgabe 28:

Berechne den Inhalt der Fläche, die die Graphen der Funktionen f(x) und g(x) mit der Geraden x=6 einschließen.

$$f(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2$$



Notizen:

Integral im Sachkontext

Integral der Ausgangsfunktion	Ausgangsfunktion
Strecke	Geschwindigkeit
Geschwindigkeit	Beschleunigung
Wachstum (Länge)	Wachstumsgeschwindigkeit

Aufgabe 29:

Ein See enthält Anfang des Sommers insgesamt 5.000 m³ Wasser. Die Zuflussrate des Wassers in den See kann durch folgende Funktion beschrieben werden: $f(t) = -t^2 + 20t + 120$

t ist die vergangene Zeit in Tagen; f(t) ist die Wasserzuflussrate in m^3 pro Tag

Wie viel Wasser enthält der See 15 Tage später?

Notizen:

Mittelwert

Den Mittelwert einer stetigen Funktion im Intervall [a;b] kannst du berechnen durch:

$$\bar{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Aufgabe 30:

Ein Auto beschleunigt 40 Sekunden lang und die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde zum Zeitpunkt t (in Sekunden) ist durch folgende Funktion gegeben:

$$f(t) = \frac{3}{2} t$$

Wie hoch ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten 40 Sekunden?

Notizen:

Rotationskörper

Bei der Rotation einer Fläche zwischen Graph und x-Achse entsteht ein Körper, dessen Volumen wie folgt berechnet wird:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Für die Funktion f(x) im Intervall [a;b]

ACHTUNG: Ist f(x) eine Summe oder eine Differenz musst du beim Quadrieren die Binomische Formel anwenden

Aufgabe 31:

Eine Fläche wird begrenzt durch die Koordinatenachsen, durch x=6 und durch die Funktion f(x).

$$f(x) = \sqrt{2(x^2+1)}$$

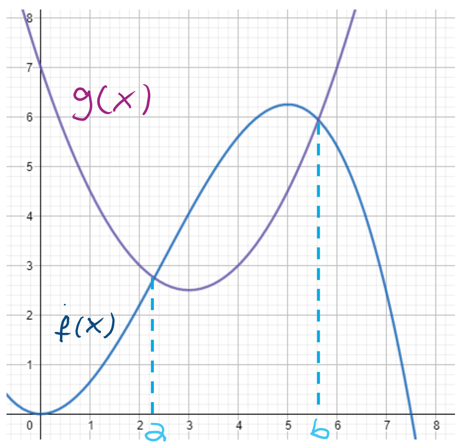
Wenn die Fläche um die x-Achse rotiert entsteht ein Rotationskörper. Bestimme das Volumen.

Rotationskörper

Betrachtest du einen Hohlkörper berechnest du das Volumen so:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx - \pi \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$$

$$= \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,dx$$



Lösungen der Aufgaben

Lösung Aufgabe 1

Bestimmung der Definitionsmenge:

c) $f(x) = 2x^2 + 3x + 10$, $D_f = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-0{,}5\}$

Der Term $2x+1$ darf nicht 0 werden

$2x + 1 \neq 0 \quad |-1$

$2x \neq -1 \quad |:2$

$x \neq -0{,}5$

Lösung Aufgabe 2

a) Gegeben: P(1 | 2) und Q(2 | 5)

$f(x) = m \cdot x + b$

P: $2 = m \cdot 1 + b \iff 2 = m + b \quad (I)$

Q: $5 = m \cdot 2 + b \quad |-2m$

$\iff 5 - 2m = b \quad (II)$

Die Steigung lässt sich auch über $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ berechnen.

Einsetzen in I:

$2 = m + 5 - 2m \quad |-5$

$-3 = -m \quad |\cdot(-1)$

$3 = m$

Einsetzen in II:

$5 - 2 \cdot 3 = b$

$-1 = b$ → Funktionsterm: $f(x) = 3x - 1$

b) Zu Beginn sind in dem Teich 5 Liter und nach 5 Stunden hat sich die Wassermenge verdoppelt.

$f(x) = m \cdot x + b$

b : Anfangsbestand → hier: 5 l

m : Steigung / Zu- oder Abnahme

Nach 5 Stunden hat der Teich eine Wassermenge von 10 l. Der Punkt T(5 | 10) liegt also auf der Geraden.

Punkt T(5|10) einsetzen:

$f(5) = 10 = m \cdot 5 + 5 \quad | -5$

$\Leftrightarrow \quad 5 = m \cdot 5 \quad | :5$

$\Leftrightarrow \quad 1 = m$

Funktionsterm: $f(x) = 1x + 5 = x + 5$

Lösung Aufgabe 3

a) Gegeben: P(4 | 2) und Q(2 | 5) , Achsenschnittstelle bei y=2

$f(x) = ax^2 + bx + c$

y-Achsenabschnitt → $c = 2$

P: $f(4) = 2 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 2 = 16a + 4b + 2 \quad | -2$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 16a + 4b \quad (I)$

Q: $f(2) = 5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2 \quad | -2$

$\Leftrightarrow \quad 3 = 4a + 2b$

Zu einer Variablen auflösen: $| -4a$

$3 - 4a = 2b \quad | :2$

$\Leftrightarrow 1{,}5 - 2a = b \quad (II)$

II in I einsetzen:

$0 = 16a + 4 \cdot (1{,}5 - 2a)$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 16a + 6 - 8a \quad | -6$

$\Leftrightarrow -6 = 8a \quad | :8$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}75 = a$

a in II einsetzen:

$1{,}5 - 2 \cdot 0{,}75 = 0 = b$

Funktionsgleichung: $f(x) = 0{,}75 \cdot x^2 + 2$

b) Gegeben: Mit dem Faktor -3 gestreckt; Scheitelpunkt (1 | 0,25)

Streckfaktor: $a = -3$
Scheitelpunkt gegeben → es ist leichter, die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform zu bestimmen.

$f(x) = a \cdot (x-d)^2 + e$
$S(\underbrace{1}_{d} \mid \underbrace{0,25}_{e})$

Also gilt: $f(x) = -3 \cdot (x-1)^2 + 0,25$

Lösung Aufgabe 4

f(t) = -2t + 300
$f(t) = 0$

$0 = -2t + 300 \quad | +2t$
$\Leftrightarrow 2t = 300 \quad | : 2$
$\Leftrightarrow t = 150$

→ A: Nach 150 Minuten ist die Badewanne leer.

Lösung Aufgabe 5

f(x) = -0,02x^2 + 5x

$0 = f(x)$
$0 = -0,02x^2 + 5x \quad |$ x ausklammern
$0 = \underbrace{x}_{} \cdot \underbrace{(-0,02x + 5)}_{}$

$x = 0$

$-0,02x + 5 = 0 \quad | +0,02x$
$5 = 0,02x \quad | : 0,02$
$250 = x$

Die Brücke berührt den Boden an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 250$.

Lösung Aufgabe 6

$f(x) = 0$

$0 = -0{,}5x^2 + 2x + 2$

PQ - Formel anwenden! Dafür muss gelten:

- Vor dem = steht eine Null → Jap ✓
- Vor dem x^2 steht kein Vorfaktor
  → Müssen durch $-0{,}5$ teilen.

$0 = -0{,}5x^2 + 2x + 2 \quad |:(-0{,}5)$

$0 = x^2 - 4x - 4$

PQ-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$p = -4 \quad , \quad q = -4$

$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-4)}$

$x_1 \approx 4{,}83 \quad , \quad x_2 \approx -0{,}83$

[Ist die PQ-Formel nicht lösbar hat die Funktion keine Nullstelle]

Da der Ball in positive x-Richtung geworfen wird und der Werfende an der Stelle $x=1$ steht trifft der Ball an der Stelle $\underline{x_1 \approx 4{,}83}$ auf den Boden auf.

Wie weit ist der Ball geflogen?

$4{,}83 - 1 = 3{,}83$

Da trifft der Ball auf den Boden

Da wird der Ball abgeworfen

Der Ball ist 3,83 Einheiten weit geflogen.

Lösung Aufgabe 7

Jule soll im Matheunterricht beantworten, wann der Graph der Funktion f(x) die x-Achse schneidet. Du probierst Jule zu helfen. Wie würdest du die Aufgabe für f(x) = $2x^4$ - $64x^2$ - 288 lösen?

$0 = 2x^4 - 64x^2 - 288$

→ Wenn die Variable nur die Exponenten 2 und 4 hat kannst du Substitution nutzen

→ Ersetze die quadrierte Variable durch eine neue Variable! $x^2 = z$ → $x^2 = z$ einsetzen

$0 = 2z^2 - 64z - 288$

→ Die Gleichung können wir mit der PQ-Formel lösen

Dafür muss gelten:

- Vor dem = steht eine Null → Jap ✓
- Vor dem z^2 steht kein Vorfaktor
  → Müssen durch 2 teilen

$0 = 2z^2 - 64z - 288 \quad |:2$

$0 = z^2 - 32z - 144$

Für die PQ-Formel: $p = -32$; $q = -144$

$$z_{1,2} = -\frac{-32}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{32}{2}\right)^2 - (-144)}$$

→ $z_1 = 36$, $z_2 = -4$

Und wir wissen, dass gilt: $x^2 = z$

Für z_1: $x^2 = 36 \quad |\sqrt{\ }$

$x_{1/2} = \pm 6$

Für z_2: $x^2 = -4$ unlösbar

Der Graph der Funktion f(x) schneidet die x-Achse an den Stellen $x_1 = 6$, $x_2 = -6$.

Lösung Aufgabe 8

Da eine Nullstelle bei $x=1$ liegt teilst du die Funktion durch $(x-1)$

$$
\begin{array}{l}
(x^3-2x^2-5x+6):(x-1)=x^2-x-6 \\
-(x^3-x^2) \\
\hline
\quad -x^2-5x \\
\quad -(-x^2+x) \\
\hline
\qquad -6x+6 \\
\qquad -(-6x+6) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Rechenweg:

1. $x^3 : x = x^2$
2. $x^2 \cdot (x-1) = x^3 - x^2$
3. $(x^3-2x^2)-(x^3-x^2)$
   $= -x^2$

Jetzt setzen wir unser Ergebnis gleich 0 und bestimmen dafür die Nullstellen. $x^2-x-6=0$

PQ-Formel: $p=-1$, $q=-6$

$x_{2,3} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2-(-6)}$ $\rightarrow$ $x_2=3$, $x_3=-2$

Nullstellen: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=-2$

Lösung Aufgabe 9

Überprüfe rechnerisch, ob folgende Funktionen eine Symmetrie aufweisen und falls ja, welche:

a) $f(x)=x^4+3x^2-10$

Ersetze x durch $-x$: $f(-x) = (-x)^4+3\cdot(-x)^2-10$
$= x^4+3x^2-10 = f(x)$

$\rightarrow$ Bedingung $f(-x)=f(x)$ ist erfüllt $\rightarrow$ $f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

b) $f(x)=-x^3+5x$

Ersetze x durch $-x$: $f(-x) = -(-x)^3+5\cdot(-x) = x^3-5x$
$= -(-x^3+5x) = -f(x)$

$\rightarrow$ Bedingung $f(-x)=-f(x)$ ist erfüllt $\rightarrow$ $f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Lösung Aufgabe 10

$\text{I}: \; 2x+3y=15 \quad | \; \text{I} - 2\cdot\text{II}$

$\text{II}: \; x+y=5$

$\text{Ia}: \; 2x+3y-2x-2y = 15-2\cdot 5$

$\Leftrightarrow \quad y=5$

Jetzt setzen wir $y=5$ in eine der beiden Gleichungen ein.
In I einsetzen:

$$
\begin{aligned}
2x+3\cdot 5 &= 15 \\
2x+15 &= 15 \quad |-15 \\
\Leftrightarrow \quad 2x &= 0 \quad |:2 \\
\Leftrightarrow \quad \underline{x} &\underline{= 0}
\end{aligned}
$$

Lösung Aufgabe 11

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 & &(\mathrm{I})\\
2x_1 - x_2 + x_3 &= 4 & &(\mathrm{II})\\
-x_1 + 0{,}5\,x_2 - 0{,}5x_3 &= -2 & &(\mathrm{III})\\
\hline
2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 & &(\mathrm{I})\\
2x_2 + x_3 &= 1 & &(\mathrm{IV}) = (\mathrm{I}) - (\mathrm{II})\\
2x_2 + x_3 &= 1 & &(\mathrm{V}) = (\mathrm{I}) + 2\cdot(\mathrm{III})\\
\hline
2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 & &(\mathrm{I})\\
2x_2 + x_3 &= 1 & &\mathrm{IV}\\
0 &= 0 & &\mathrm{VI} = \mathrm{IV} - \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Lösungen in Abhängigkeit von Parameter t darstellen: $\boxed{x_3 = t}$

IV: $2x_2 + t = 1 \iff \boxed{x_2 = 0{,}5 - 0{,}5t}$

I: $2x_1 + 0{,}5 - 0{,}5t + 2\cdot t = 5 \quad | -0{,}5 + 0{,}5t - 2t$

$$
\begin{aligned}
\iff 2x_1 &= 5 - 0{,}5 + 0{,}5t - 2t\\
2x_1 &= 4{,}5 - 1{,}5t\\
\Aboxed{x_1 &= 2{,}25 - 0{,}75t}
\end{aligned}
$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

Lösung Aufgabe 12

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 & &(\mathrm{I})\\
2x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 12 & &(\mathrm{II})\\
x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 3 & &(\mathrm{III})\\
\hline
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 & &(\mathrm{I})\\
2x_2 - x_3 &= -2 & &(\mathrm{IV}) = (\mathrm{III}) - (\mathrm{I})\\
-2x_2 + x_3 &= 6 & &(\mathrm{IV}) = (\mathrm{II}) - 2\cdot(\mathrm{III})\\
\hline
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 & &(\mathrm{I})\\
2x_2 - x_3 &= -2 & &(\mathrm{IV})\\
\Aboxed{0 &= 4} & &(\mathrm{VI}) = (\mathrm{IV}) + (\mathrm{V})
\end{aligned}
$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung

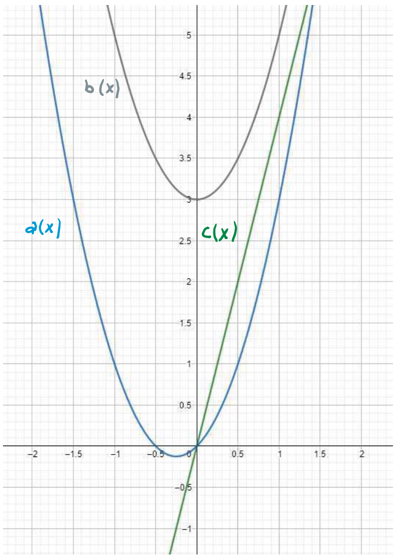
Lösung Aufgabe 13

Eine Schlucht kann annähernd durch die Funktion f(x) = $2x^2$ beschrieben werden. Bestimme die Änderungsrate im Intervall [0;2] und interpretiere das Ergebnis im Sachkontext (Werte in Metern).

Änderungsrate : $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{2\cdot 2^2 - 2\cdot 0^2}{2-0} = 4$

Interpretation: f(x) beschreibt die Höhe (bzw Tiefe) und x die Breite. Im Durchschnitt beträgt die Höhenzunahme auf einer Strecke von 0m bis 2m 4 Höhenmeter pro Meter.

Lösung Aufgabe 14

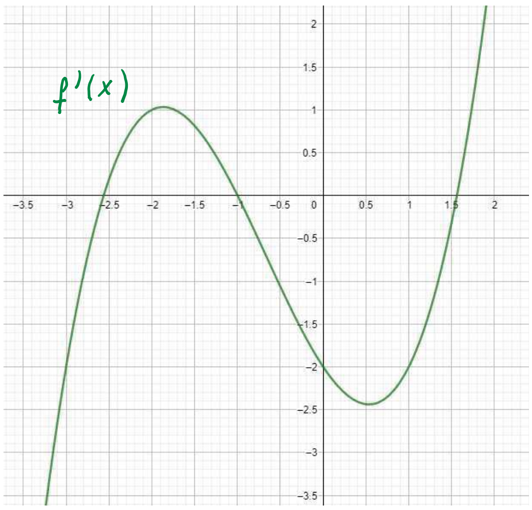


c(x) ist der Ableitungsgraph von b(x).

Das siehst du daran, dass der graue Graph bis zu einem x-Wert von 0 fällt, dann einen Tiefpunkt hat und anschließend steigt. Somit muss der Ableitungsgraph bei einem x-Wert von 0 eine Nullstelle haben, weiter links unterhalb der x-Achse und weiter rechts oberhalb der x-Achse verlaufen.

Lösung Aufgabe 15

- ○ An der Stelle x = -1 hat f(x) einen Extrempunkt → Aussage ist wahr, weil f'(x) dort eine Nullstelle hat
- ○ An der Stelle x=0 hat f(x) einen Hochpunkt → Aussage ist falsch, weil f'(x) dann an dieser Stelle 0 sein müsste
- ○ Die Steigung von f an der Stelle x=1 ist negativ → Aussage ist wahr, weil f'(x) dort unterhalb der x-Achse verläuft



Lösung Aufgabe 16

a) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 0{,}5x + 1$

$f'(x) = 3 \cdot 2x^2 + 2x - 0{,}5 = 6x^2 + 2x - 0{,}5$

b) $f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + x^{-1}$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}x - 1 + (-1) \cdot x^{-2} = x - 1 - x^{-2}$

d) $f(x) = \sqrt{x} + x^2 = x^{1/2} + x^2$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + 2x$

e) $f(x) = \frac{2}{x} + x^3 - 0{,}5x^2 = 2x^{-1} + x^3 - 0{,}5x^2$

$f'(x) = -2x^{-2} + 3x^2 - x$

Lösung Aufgabe 17

$f(x) = x^3 \cdot (5 - 2x^2)^2$ → Produkt- & Kettenregel

Produktregel: $u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$, $v(x) = (5 - 2x^2)^2$

Für $v'(x)$ Kettenregel: $v(x) = f(g(x))$

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $g(x) = 5 - 2x^2 \rightarrow g'(x) = -4x$

$\rightarrow v'(x) = 2 \cdot (5 - 2x^2) \cdot (-4x) = -40x + 16x^3$

$f'(x) = 3x^2 \cdot (5 - 2x^2)^2 + x^3 \cdot (-40x + 16x^3)$

$= 28x^6 - 100x^4 + 75x^2$

Lösung Aufgabe 18

Bestimmte die Gleichung der Tangente, die durch den Punkt
P (1 | f(1)) in der Funktion f(x) = 3x² +2 verläuft

$y = m \cdot x + b$

$m = f'(x_0) = f'(1)$

$f'(x) = 6x \rightarrow f'(1) = 6 = m$

$f(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 = 5$

$5 = 6 \cdot 1 + b \quad | -6$

$\Leftrightarrow -1 = b \quad \Rightarrow$ Tangente: $y = 6x - 1$

Lösung Aufgabe 19

$f(x) = 2x^2 - x \quad , \quad g_a(x) = x^3 - ax$

Bedingung 1: $f(x) = g(x)$

$2x^2 - x = x^3 - ax$

$\Leftrightarrow 0 = x^3 - 2x^2 + (1-a)x \quad |$ x ausklammern

$0 = x \cdot [x^2 - 2x + 1 - a]$

Einer der Faktoren muss 0 werden

$x_1 = 0$

$0 = x^2 - 2x + 1 - a \quad |$ PQ-Formel

$x_{2/3} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (1-a)}$

$= 1 \pm \sqrt{(-1)^2 - (1-a)} = 1 \pm \sqrt{a}$

Bedingung 2: $f'(x_0) = g_a'(x_0)$

$f'(x) = 4x - 1 \quad , \quad g_a'(x) = 3x^2 - a$

Für $x_1 = 0$: $4 \cdot 0 - 1 = 3 \cdot 0^2 - a$

$\Leftrightarrow -1 = a_1 \quad \Rightarrow \quad B_1(0|0)$

Für $x_2 = 1+\sqrt{a}$: $4\cdot(1+\sqrt{a})-1 = 3\cdot(1+\sqrt{a})^2 - a$

$\Leftrightarrow 4+4\cdot\sqrt{a}-1 = 3+2\cdot 3\cdot\sqrt{a}+3\cdot\sqrt{a}^2 - a$

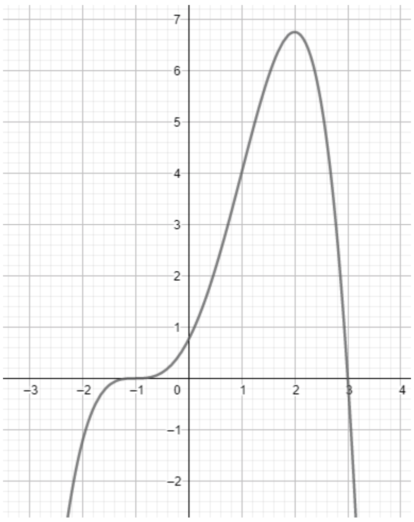
$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{a} = a$

$\Leftrightarrow \quad a_2 = 0 \quad \Rightarrow B_2(1|1)$

Für $x_3 = 1-\sqrt{a}$ gilt entsprechend $a = \sqrt{a}$ und damit ebenfalls $a_2 = 0 \rightarrow B_2(1|1)$

Die Graphen $g_{-1}(x)$ und $g_0(x)$ haben jeweils einen Berührpunkt mit $f(x)$.

Lösung Aufgabe 20



In welchem Intervall zeigt dieser Graph welches Monotonieverhalten?

Für $x < -1$: streng monoton steigend

Für $-1 > x > 2$: streng monoton steigend

Für $x < 2$: monoton steigend

Für $x > 2$: streng monoton fallend

Lösung Aufgabe 21

Monotonieverhalten von $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$ in den Intervallen:

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x$

2. $0 = 3x^2 - 6x \quad | \; x$ ausklammern

$0 = x\cdot(3x-6)$

$x_1 = 0$

$0 = 3x - 6 \quad | +6$

$\Leftrightarrow 6 = 3x \quad | :3$

$\Leftrightarrow 2 = x_2$

3. Intervall 1 ist $x < 0$
Ich wähle die Stelle $x = -1$:
$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 9$
$f'(-1) > 0 \rightarrow f$ ist in Intervall 1 streng monoton steigend

Intervall 2 ist $0 < x < 2$
Ich wähle die Stelle $x = 1$:
$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$
$f'(1) < 0 \rightarrow f$ ist in Intervall 2 streng monoton fallend

Intervall 3 ist $x > 2$
Ich wähle die Stelle $x = 4$:
$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 = 24$
$f'(4) > 0 \rightarrow f$ ist in Intervall 3 streng monoton steigend

Lösung Aufgabe 22

$f(x) = -0.25\, x^4 + 1.5\, x^2 + 0.75$

$f'(x) = -x^3 + 3x$

$f''(x) = -3x^2 + 3$

$f'(x) = 0$

$0 = -x^3 + 3x \quad |\, x$ ausklammern

$0 = x \cdot (-x^2 + 3)$

$x_1 = 0$

$-x^2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow x_2 = +\sqrt{3}, \quad x_3 = -\sqrt{3}$

Werte in f''(x) einsetzen:

$f''(0) = -3 \cdot 0^2 + 3 = 3$

$f''(0) > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt

$f''(+\sqrt{3}) = -3 \cdot \sqrt{3}^2 + 3 = -6$

$f''(+\sqrt{3}) < 0 \rightarrow$ Hochpunkt

$f''(-\sqrt{3})$ ist irrelevant, weil die Zeit nicht negativ sein kann.

$\rightarrow$ In der Aufgabenstellung ist nur nach dem Hochpunkt gefragt.

$f(+\sqrt{3}) = -0{,}25 \cdot \sqrt{3}^4 + 1{,}5\, \sqrt{3}^2 + 0{,}75 = 3$

Im höchsten Punkt befindet sich der Ball nach $\sqrt{3}$ Sekunden und ist 3m über dem Boden.

Lösung Aufgabe 23

Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit des Autos am größten ist. Die gegebene Funktion beschreibt die Strecke. Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Strecke, also hier f'(x). Gesucht ist der Hochpunkt der Ableitung f'(x) und somit der Wendepunkt von f(x).

Also rechnen wir:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + 40$$
$$f'(x) = x^2 - 8x + 7$$
$$f''(x) = 2x - 8$$
$$f'''(x) = 2$$

$$f''(x) = 2x - 8$$

$$0 = 2x - 8 \quad | +8$$
$$\Leftrightarrow 8 = 2x \quad | :2$$
$$\Leftrightarrow 4 = x$$

$$f'''(4) = 2$$

$f'''(4) > 0 \rightarrow$ An der Stelle $x = 4$ liegt ein Wendepunkt vor.

$$f(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + 40 \approx 25{,}33$$

Die Geschwindigkeit ist zum Zeitpunkt x=4 am größten und zu diesem Zeitpunkt hat das Auto 25,33 Einheiten zurück gelegt.

Lösung Aufgabe 24

f(x) = (2x-5) e^{2x+3}

Für $f'(x)$ Produktregel verwenden:

Produktregel: $u(x) = 2x - 5$, $u'(x) = 2$, $v(x) = e^{2x+3}$

Für $v'(x)$ Kettenregel:

$a(x) = e^x$, $a'(x) = e^x$, $b(x) = 2x + 3$, $b'(x) = 2$

$v'(x) = e^{2x+3} \cdot 2$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x+3} + (2x-5) \cdot 2e^{2x+3} = 2 \cdot e^{2x+3} + (4x-10) \cdot e^{2x+3}$$
$$= e^{2x+3} \cdot (4x - 8)$$

$$f'(x) = \underbrace{e^{2x+3}}_{u(x)} \cdot \underbrace{(4x-8)}_{v(x)}$$

$f''(x)$ bestimmen: $u(x) \rightarrow u'(x) = 2e^{2x+3}$, $v(x) \rightarrow v'(x) = 4$

$$f''(x) = 2e^{2x+3} \cdot (4x-8) + 4 \cdot e^{2x+3}$$
$$= e^{2x+3} \cdot (8x-12)$$

$f'''(x)$ bestimmen: $u(x) = e^{2x+3} \rightarrow u'(x) = 2e^{2x+3}$

$v(x) = 8x - 12 \rightarrow v'(x) = 8$

$$f'''(x) = 2e^{2x+3} \cdot (8x-12) + e^{2x+3} \cdot 8$$
$$= e^{2x+3} \cdot (16x - 16)$$

Extrempunkte bestimmen:

$f'(x) = e^{2x+3} \cdot (4x-8)$

$0 = e^{2x+3} \cdot (4x-8)$

$e^{2x+3} \neq 0$

$0 = 4x - 8 \quad |+8$

$\Leftrightarrow 8 = 4x \quad |:4$

$\Leftrightarrow 2 = x$

$f''(2) = e^{2\cdot2+3} \cdot (8\cdot2-12) \approx 4386,53$

$\boxed{f''(2) > 0 \rightarrow \text{Tiefpunkt}}$

Tiefpunkt für $x = 2$: $f(2) = -1096,63 \Rightarrow \boxed{T(2 \mid -1096,63)}$

Wendepunkte bestimmen:

$f''(x) = e^{2x+3} \cdot (8x-12)$

$0 = e^{2x+3} \cdot (8x-12)$

$e^{2x+3} \neq 0$

$0 = 8x - 12 \quad |+12$

$12 = 8x \quad |:8$

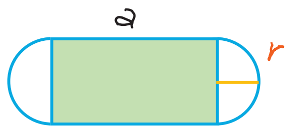
$1,5 = x$

$f'''(1,5) = e^{2\cdot1,5+3} \cdot (16\cdot1,5 - 16) \approx 3227,43$

$\boxed{f'''(1,5) \neq 0 \rightarrow \text{Wendepunkt}}$

Wendepunkt für $1,5 = x$: $f(1,5) = -806,86 \rightarrow \boxed{W(1,5 \mid -806,86)}$

Lösung Aufgabe 25



Flächeninhalt des Sportplatzes:

$A = a \cdot 2r \quad (I)$

Nebenbedingung: Die Laufbahn ist 500m lang:

$2a + 2\pi r = 500$

$\Leftrightarrow a = 250 - \pi r$

Einsetzen in I:

$A = (250 - \pi r) \cdot 2r$

$= 500r - 2\pi r^2$

Zur Erinnerung:
$U_{Kreis} = 2\pi r$
$U_{Halbkreis} = \pi r$
$2 \cdot U_{Halbkreis} = 2\pi r$

Bestimmung der Extrempunkte

$A(r) = 500r - 2\pi r^2$

$A'(r) = 500 - 4\pi r$

$A''(r) = -4\pi$

Notwendiges Kriterium: $A'(r) = 0$

$0 = 500 - 4\pi r \quad |+4\pi r$

$\Leftrightarrow 4\pi r = 500 \quad |:4\pi$

$\Leftrightarrow r = \frac{125}{\pi}$

Hinreichendes Kriterium:

$A''(r) = -4\pi$

$A''(r) < 0 \quad \rightarrow$ Hochpunkt ✓

Für $r = \frac{125}{\pi}$ liegt also ein Hochpunkt vor.

$A\left(\frac{125}{\pi}\right) = 500 \cdot \frac{125}{\pi} - 2\pi \cdot \left(\frac{125}{\pi}\right)^2 \approx \boxed{9947}$

$a = 250 - \pi r$

$a = 250 - \pi \cdot \frac{125}{\pi} = \boxed{125}$

Betrachtung der Randwerte:
Ein negativer Wert für den Radius ergibt im Kontext keinen Sinn!
Also gilt $r \geq 0$: Der maximale Wert für r ergibt sich durch $a = 0$

$2a + 2\pi r = 500 \quad | a = 0$

$0 + 2\pi r = 500 \quad |: 2\pi$

$\Leftrightarrow r = \frac{250}{\pi}$

Für die Randwerte muss jeweils A berechnet werden

$A(r) = 500r - 2\pi r^2$

Für $r = 0$:

$A(0) = 500 \cdot 0 - 2\pi \cdot 0^2 = 0$

Für $r = \frac{250}{\pi}$

$A\left(\frac{250}{\pi}\right) = 500 \cdot \frac{250}{\pi} - 2\pi \cdot \left(\frac{250}{\pi}\right)^2 = 0$

→ Für beide Randwerte ist der Flächeninhalt 0 und somit nicht maximal!

→ Der Flächeninhalt des Sportplatzes wird also maximal für $r = \frac{125}{\pi}$ und $a = 125$.

Lösung Aufgabe 26

Funktion 3. Grades:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen:

- Verläuft durch P(0|-2): $f(0) = -2$

  $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = -2 \iff d = -2$

- Hochpunkt an Stelle 1 $f'(1) = 0$

  $3a \cdot 1 + 2b \cdot 1 + c = 0 \iff 3a + 2b + c = 0$

- Wendepunkt an Stelle 2 $f''(2) = 0$

  $6a \cdot 2 + 2b = 0 \iff 12a + 2b = 0$

- Steigung von -1,5 an Stelle 2 $f'(2) = -1{,}5$

  $3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = -1{,}5 \iff 12a + 4b + c = -1{,}5$

Bedingungen im Überblick:

I: $3a + 2b + c = 0 \quad | -3a \quad | -2b$

II: $12a + 2b = 0$

III: $12a + 4b + c = -1{,}5$

$\text{I}: \quad c = -3a - 2b$

Einsetzen in III:

$12a + 4b - 3a - 2b = -1{,}5$

$\Leftrightarrow \quad b = -0{,}75 - 4{,}5a$

Einsetzen in II:

$12a + 2 \cdot (-0{,}75 - 4{,}5a) = 0$

$12a - 1{,}5 - 9a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0{,}5$

$12 \cdot 0{,}5 + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -3$

$c = -3 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot (-3) = 4{,}5$

$f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 4{,}5x - 2$

In der Klausur solltest du sicherheitshalber die Probe machen und anhand der Funktion nochmal die gegebenen Bedingungen überprüfen.

Lösung Aufgabe 27

Berechnung des Integrals:

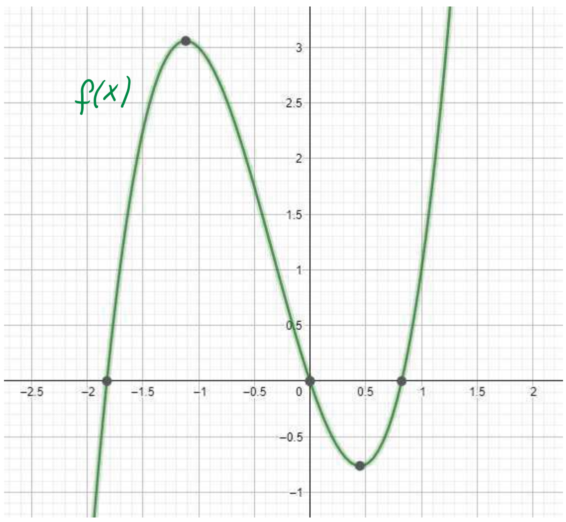
$$\int_{-1,5}^{0,5} f(x)\,dx = \int_{-1,5}^{0,5} 2x^3 + 2x^2 - 3x\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1,5}^{0,5}$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}5^4 + \frac{2}{3}\,0{,}5^3 - \frac{3}{2}\,0{,}5^2$$

$$- \left[0{,}5 \cdot (-1{,}5)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-1{,}5)^3 - \frac{3}{2}\,(-1{,}5)^2\right]$$

$$\approx 2{,}83$$



Berechnung des Flächeninhaltes:

Berechnung der Nullstellen:

$0 = 2x^3 + 2x^2 - 3x$

$0 = x \cdot (2x^2 + 2x - 3)$

$x_1 = 0$

$2x^2 + 2x - 3 = 0 \quad |:2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1{,}5 = 0$

$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-1{,}5)}$

$x_2 \approx 0{,}82 \qquad x_3 \approx -1{,}82$

Nur x_1 liegt im betrachteten Intervall

Berechnung des Flächeninhaltes:

$$\left|\int_{-1,5}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{0,5} f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1,5}^{0}\right| + \left|\left[\frac{2}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{0,5}\right|$$

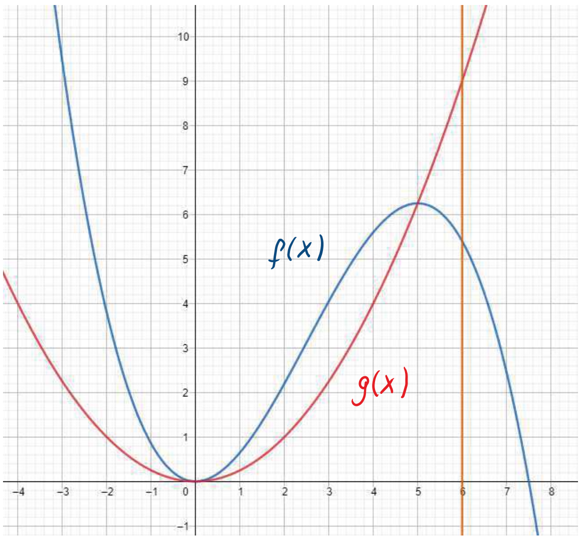
$$= \left|0-\left[\frac{2}{4}(-1,5)^4+\frac{2}{3}(-1,5)^3-\frac{3}{2}(-1,5)^2\right]\right|$$

$$+\left|\left[\frac{2}{4}\cdot 0,5^4+\frac{2}{3}\cdot 0,5^3-\frac{3}{2}\cdot 0,5^2\right]-0\right|$$

$$\approx |3,09| + |-0,26| = 3,35$$

Lösung Aufgabe 28

Schnittpunkt von f(x) und g(x) berechnen:



$$f(x) = g(x)$$

$$-\frac{1}{10}x^3+\frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2$$

$$-\frac{1}{10}x^3+\frac{2}{4}x^2 = 0$$

$$x^2\left(-\frac{1}{10}x+\frac{2}{4}\right) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ -\frac{1}{10}x + 0,5 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad x_2 = 5 \end{array}\right\} \text{Für uns ist } x_2 \text{ und nicht } x_1 \text{ relevant}$$

$$A = \int_{5}^{6} |g(x)-f(x)|\,dx$$

$$= \int_{5}^{6} \left|\frac{1}{4}x^2-\left(-\frac{1}{10}x^3+\frac{3}{4}x^2\right)\right| dx$$

$$= \int_{5}^{6} \left|-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{10}x^3\right| dx$$

$$= \left|\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{40}x^4\right]_{5}^{6}\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{6}\cdot 6^3+\frac{1}{40}\cdot 6^4-\left[-\frac{1}{6}\cdot 5^3+\frac{1}{40}\cdot 5^4\right]\right|$$

$$= \frac{193}{120}$$

Lösung Aufgabe 29

Gesucht: $F(15)$

$F(15) = F(0) + \int_0^{15} f(t)\,dt$

F gibt den Wasserstand in m^3 nach t Tagen an.

Für $t = 0$ gilt $F(0) = 5000$

$$F(15) = 5000 + \left[-\frac{1}{3}t^3 + 10t^2 + 120t\right]_0^{15}$$

$$= 5000 - \frac{1}{3}\cdot 15^3 + 10\cdot 15^2 + 120\cdot 15 - 0 = 7925$$

15 Tagen nach Start der Messung enthält der See $7925\,m^3$ Wasser.

Lösung Aufgabe 30

$$\bar{m} = \frac{1}{40-0}\int_0^{40} \frac{3}{2}t\,dt = \frac{1}{40}\cdot\left[\frac{3}{4}t^2\right]_0^{40}$$

$$= \frac{1}{40}\cdot\left[\frac{3}{4}\cdot 40^2 - 0\right] = 30$$

In den ersten 40 Sekunden fährt das Auto durchschnittlich 30m/s

Lösung Aufgabe 31

$$V = \pi\int_0^6 \left(\sqrt{2(x^2+1)}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^6 2(x^2+1)\,dx = \pi\int_0^6 2x^2 + 2\,dx$$

$$= \pi\cdot\left[\frac{2}{3}x^3 + 2x\right]_0^6 = \pi\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot 6^3 + 2\cdot 6 - 0\right]$$

$$= 156\pi$$